ഗണിതം നിത്യജീവിതത്തിൽ

ജനകീയ ശാസ്ത്രം

ഗണിതം
നിത്യജീവിതത്തിൽ

ആർ. എം. ഭഗവത്

തർജമ

എം. നന്ദകുമാർ

ചിത്രീകരണം

പബിത്ര ഘോഷ്



നാഷണൽ ബുക്ക് ട്രസ്റ്റ്, ഇന്ത്യ

ISBN 81-237-3051-9

2000(ശക 1921)

രൂ. 30.00

Everyday Mathematics *(Malayalam)*

പ്രസാധനം ഡയറക്ടർ, നാഷണൽ ബുക്ക് ട്രസ്റ്റ് ഇന്ത്യ
എ 5, ഗ്രീൻ പാർക്ക്, ന്യൂഡൽഹി 110016

ഉള്ളടക്കം

എന്റെ അച്ഛനുമമ്മയ്ക്കും

കടപ്പാട്

ടാറ്റാ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ് ഫണ്ടമെന്റൽ റിസർച്ചിലെ (TIFR, ബോംബെ), ഹോമി ഭാഭാ സെന്റർ ഫോർ സയൻസ് എഡ്യു ക്കേഷന്റെ (HBCSE) മുൻ ഡയറക്ടറായിരുന്ന പ്രൊഫ. വി. ജി. കുൽക്കർണിയോടുള്ള കടപ്പാട് അതീവ സന്തോഷത്തോടെ രേഖപ്പെടുത്തട്ടെ. ഈ പുസ്തകം തയ്യാറാക്കുമ്പോൾ അദ്ദേഹം എല്ലാവിധ സഹായ സഹകരണങ്ങളും സൗകര്യങ്ങളും ചെയ്തു തന്നു. പുസ്തക രചനയ്ക്ക് പ്രചോദനം നല്കിയ ഡോ. എച്ച്. സി. പ്രധാനോടും ഞാൻ അങ്ങേയറ്റം നന്ദിയുള്ളവനാണ്. കയ്യെഴുത്ത് പ്രതി വിമർശനാത്മകമായി വിലയിരുത്തി, വിലപ്പെട്ട നിർദേശങ്ങൾ നല്കിയത് അദ്ദേഹമാണ്. നിരന്തരമായി എന്നെ പ്രചോദിപ്പിച്ചതിനും സഹായിച്ചതിനും ഞാൻ അദ്ദേഹത്തോട് കടപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. കീർത്തി കോളേജിലെ (ബോംബെ) ഡോ. സീമാ പുരോഹിത് അതീവ നിഷ്കർഷയോടെ കയ്യെഴുത്തു പ്രതി വായിച്ച് നിർദേശങ്ങൾ നല്കി. അവരോടും നന്ദി രേഖപ്പെ ടുത്തുന്നു. അച്ചടിക്കാനുള്ള കോപ്പി തയ്യാറാക്കിയ ശ്രീ. അരുൺ മാവലങ്കർ, ടൈപ്പ് ചെയ്ത ശ്രീമതി വി. എൻ. പുരോഹിത്, വേഡ് പ്രോസസ്സറിലേക്ക് മാറ്റിയ ശ്രീ. വി. എൻ. ഗുരാവ്, ഫോട്ടോ കോപ്പി ചെയ്ത ശ്രീ. ശിവാജി നാഡ്കർ എന്നിവരോട് നന്ദി രേഖപ്പെടുത്തട്ടെ. HBCSEയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും അങ്ങേയറ്റം സഹായസന്നദ്ധരായിരുന്നു. നീലേഷ്, സമീർ, വൃന്ദ, ധനശ്രീ, എന്റെ കുടുംബാംഗങ്ങൾ എന്നിവർ NBT യിൽ വരയ്ക്കുന്നതിനു മുമ്പ് ചിത്രങ്ങൾ ഒരുക്കാൻ സഹായിച്ചതിനാൽ എനിക്ക് കൃതജ്ഞതയുണ്ട്

പുസ്തകം എഴുതിത്തീർക്കുന്നതിലെ കാലതാമസം ക്ഷമാ പൂർവം സഹിച്ച്, കണിശമായും എന്റെ എഴുത്തിനെ പ്രോത്സാ ഹിപ്പിക്കാൻ, നാഷണൽ ബുക്ക് ട്രസ്റ്റിലെ അസിസ്റ്റന്റ് എഡിറ്റർ ശ്രീമതി മഞ്ജു ഗുപ്ത ഇല്ലായിരുന്നെങ്കിൽ ഈ കൃതി പൂർത്തി യാവുകയില്ലായിരുന്നു. അവർ നല്കിയ ആശംസകൾക്കും പ്രചോദനങ്ങൾക്കും ഞാൻ ആത്മാർഥമായി നന്ദി പറയുന്നു.

ആർ. എം. ഭഗവത്

ആമുഖം

മനുഷ്യന്റെ മനസ്സിൽ നിന്ന് ഉരുത്തിരിഞ്ഞ ഒരു സൃഷ്ടിയാണ് ഗണിതം. അവന്റെ പ്രവൃത്തികളിലൂടെയും പ്രകൃതി നിരീക്ഷണത്തിലൂടെയും ഗണിതം ആവിർഭവിച്ചു. മാനസിക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ രീതികളുടെ ആധാരത്തിലേക്ക് കടന്നു ചെന്ന ഗണിതം ആ രീതികളെ കൃത്യമായ പദങ്ങളാൽ ആവിഷ്കരിക്കുന്നു. യഥാർഥമായ ലോകം ആശയങ്ങളുടെ ലോകത്തിലേക്ക് മാറ്റപ്പെടുകയും യാഥാർഥ്യത്തെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന അമൂർത്താശയങ്ങളുടെ നിയമങ്ങൾ പഠനവിധേയമാക്കുകയും ചെയ്യുന്നതാണ് ഗണിതം. ദൈനംദിന ഗണിതത്തിന്റെ വലിയൊരു ഭാഗം ഈ അടിസ്ഥാനാശയങ്ങളുടെ സത്തയായതിനാൽ മനസ്സിലാക്കുവാൻ എളുപ്പമാണ്. ചോദന കൊണ്ടു തന്നെ ഈ ആശയങ്ങളെ നമുക്ക് അറിയാം. എന്നിരിക്കിലും അനുയോജ്യമായ പദാവലിയും നിയമങ്ങളും പ്രതീകങ്ങളും കൊണ്ട് അവയെ ചുരുക്കി, കൃത്യമായി പ്രതിനിധീകരിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമായി വരുന്നു. ഗണിതത്തിന് തനതായ ഭാഷയും ലിപിയും ഉണ്ട്. ആദ്യം പഠിച്ചെടുക്കേണ്ടതും ഗണിതഭാഷ തന്നെ. ഇക്കാരണത്താലാകാം ഗണിതത്തിന് നിത്യജീവിതവുമായി വലിയ ബന്ധമില്ലെന്നും അത് മനസ്സിലാക്കാൻ പ്രയാസമാണെന്നുമുള്ള ധാരണ നിലനില്ക്കുന്നത്. എന്നാൽ ജീവിതവുമായി ഗാഢബന്ധമുള്ളതും ജീവിതത്തിൽ നിന്ന് ഉരുത്തിരിഞ്ഞതുമായ ശാസ്ത്രമാണ് ഗണിതം. നിരവധി ആളുകൾ ഗണിതത്തെ വെറുക്കുകയും അതിൽ നിന്ന് മുഖം തിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. പക്ഷേ, സമസ്ത ജീവിതമേഖലകളിലും അറിവിന്റെ മറ്റ് ശാഖകളിലും ഗണിതം കൂടിയേ തീരൂ. ന്യൂട്ടൺ, ഗോസ്, ആർക്കിമെഡീസ്, ലെപ്രാൻഗെ തുടങ്ങിയ മഹാശാസ്ത്രകാരന്മാർ ശാസ്ത്രത്തിനെന്ന പോലെ ഗണിതത്തിനും വിലപിടിപ്പുള്ള സംഭാവനകൾ നല്കിയത് വെറും ആകസ്മികതയല്ല.

മനുഷ്യവിജ്ഞാനത്തിലെ ആദ്യകാല വിഷയങ്ങളിൽ ഒന്നാകാം ഗണിതം. അതിന് സംസ്കാരത്തോളം തന്നെ പഴക്കമുണ്ട്. ജീവിതത്തോളം സങ്കീർണതയും വ്യാപ്തിയും ഗണിതം ആർജിച്ചു കഴിഞ്ഞു. സംസ്കാരചരിത്രത്തിലൂടെ

മനുഷ്യന് മാറ്റം സംഭവിച്ചു. ഗുഹാമനുഷ്യന്റെ ലളിതജീവിതത്തിൽ നിന്ന് ബഹുമുഖവും അതിസങ്കീർണവുമായ ആധുനികജീവിതത്തോളം പരന്നു കിടക്കുന്നതാണ് ഈ മാറ്റം. ഒപ്പം തന്നെ സമ്പന്നവും വിശാലവുമായ ശാഖയായി ഗണിതം മാറി. സാധാരണ മനുഷ്യന് ആയിരം വർഷം മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന കണക്കിൽ നിന്ന് മുന്നോട്ട് പോകേണ്ട ആവശ്യം നേരിടുന്നില്ല. എന്നാൽ ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ, ഗണിതകാരന്മാർ, സാങ്കേതിക വിദഗ്ദ്ധർ, സമ്പദ്ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ എന്നിവർ ഗണിതത്തിലെ ഏറ്റവും പരിഷ്കൃതമായ വ്യവസ്ഥകൾ മുമ്പെങ്ങുമില്ലാത്തവിധം നിത്യജീവിതത്തിൽ പ്രയോഗിച്ച് വരുന്നു. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിന്റെ സർവമേഖലകളെയും സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകമാണ് ഗണിതം ഇന്ന്.

അതിനാൽ എല്ലാ തുറകളിലും ഉള്ളവർ മാനവ പുരോഗതിക്ക് ഗണിതം നല്കിയ സംഭാവനകൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതാകുന്നു. ഈ കൃതി ദൈനംദിന ഗണിതത്തിന്റെ സ്വഭാവം നിത്യജീവിത്തിൽ നിന്നുമുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളാൽ ലളിതഭാഷയിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു. കണക്കിന്റെ ചരിത്രത്തിലുള്ള വളർച്ച വിവരിക്കുന്നത് അത് നിത്യപ്രക്രിയകളിൽ നിന്നും ഉടലെടുക്കുന്നത് എപ്രകാരമാണെന്നും സാധാരണ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണാൻ സഹായിക്കുന്ന വിധമെന്താണെന്നും ഊന്നൽ കൊടുത്തിട്ടാണ്. 12-ാം നൂറ്റാണ്ട് വരെയുള്ള ഗണിതത്തിന്റെ വളർച്ചയിലെ മിക്ക പടവുകളും ഭാരതീയ ഗണിത വിജ്ഞാനത്തിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങളെ ആധാരമാക്കിയാണെന്നുള്ളത് നമുക്ക് അഭിമാനിക്കാൻ വക നല്കുന്നു. പ്രാചീനഹിന്ദു ഗണിതകാരൻമാരുടെ സംഭാവനകൾക്ക് അർഹമായ സ്ഥാനം ഈ കൃതിയിൽ നല്കിയിരിക്കുന്നു. അമൂർത്താശയങ്ങളുടെയും നിയമങ്ങളുടെയും സഞ്ചയം മാത്രമല്ല ഗണിതം; മറിച്ച് നിത്യജീവിതത്തിന്റെ ആധാരം തന്നെയാണത് എന്ന കാര്യം ദൈനംദിന പ്രശ്നങ്ങളാൽ വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗണിതത്തിന്റെ പ്രധാന വശങ്ങൾ വിവരിക്കാൻ ഏറ്റവും കുറവ് ഗണിത സംജ്ഞകളും സൂത്രവാക്യങ്ങളും മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കുന്നുള്ളു. അനുയുക്തമായ ചിത്രങ്ങളും ഫോട്ടോഗ്രാഫുകളും ചേർത്തിട്ടുമുണ്ട്. രസകരമായ ലളിത വായനയ്ക്ക് ഉതകുന്ന വിധത്തിൽ പുസ്തകം ആക്കിത്തീർക്കാൻ പരമാവധി ശ്രമിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഗണിതത്തെ മനസ്സിലാക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള പ്രേരണ വായനക്കാർക്ക് ഈ കൃതി നല്കുമെന്ന് കരുതട്ടെ.

1

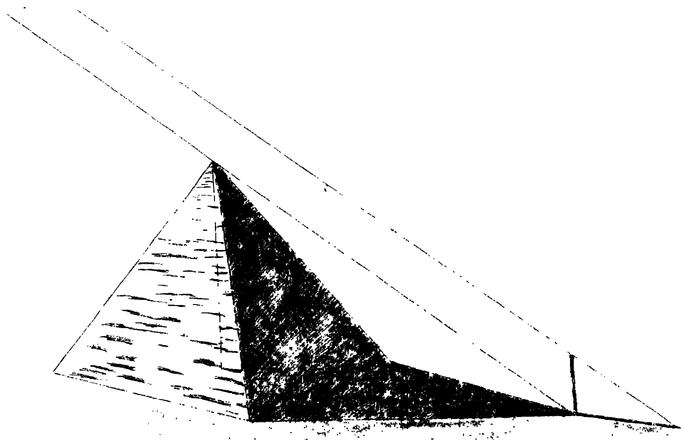
അവതാരിക

പ്രാചീനത തൊട്ടേ, ഉപകാരപ്രദമായ ഒരു വിഷയമായിരുന്നു ഗണിതം. 'പഠിക്കപ്പെട്ട വസ്തുക്കൾ' എന്ന് അർഥം പറയാവുന്ന 'മാത്തമെറ്റ' (Mathemeta) എന്ന ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽ നിന്നാണ് ഗണിതം (mathematics) എന്ന വാക്കിന്റെ ഉത്പത്തി. ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രശസ്ത ഗണിതകാരനും തത്വശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ബർട്രൻഡ് റസ്സൽ ഗണിതത്തെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് രസകരമാണ്. "നാം പറയുന്നത് എന്തിനെക്കുറിച്ചാണെന്നോ പറയുന്നത് സത്യമാണെന്നോ ഒരിക്കലും അറിയാനാകാത്ത വിഷയമെന്ന് ഗണിതത്തെ നിർവചിക്കാം." യഥാർഥലോകത്തെക്കുറിച്ച് ഗണിതം നമ്മോട് ഒന്നും പറയുന്നില്ല. ഒരു വസ്തുതയിൽ നിന്ന് മറ്റൊന്ന് ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിൽ ഉരുത്തിരിയുന്നു എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുക മാത്രമെ ഗണിതം ചെയ്യുന്നുള്ളു. ജ്ഞാനത്തിന്റെ ഒരു മേഖലയെ മാത്രം ഇപ്രകാരം നിർവചിക്കുന്നത് വിചിത്രമായി തോന്നാം. പക്ഷെ, ഗ്രീക്കുകാർക്ക് ഗണിതം സംഖ്യകളുടെയും സ്ഥലത്തിന്റെയും മാത്രം പഠനമായിരുന്നില്ല. ജ്യോതിശാസ്ത്രവും സംഗീതവും കൂടി അതിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരുന്നു. ഇക്കാലത്ത് ഗണിത വിഷയങ്ങൾ എന്ന നിലയ്ക്കല്ല സംഗീതത്തെയും ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തെയും നാം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത്. പക്ഷെ, മറ്റെന്നെത്തേക്കാളും ഗണിതത്തിന്റെ സാധ്യതകൾ വിശാലമായിക്കഴിഞ്ഞു.

ഗണിതത്തിന്റെ ഉദ്ഭവം പൗരാണികതയിൽ എവിടെയോ ആണ്. നാലായിരം വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പുതന്നെ ബാബിലോണിയക്കാരും ഈജിപ്തുകാരും ഗണിതം ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. വിളവെടുപ്പിന്റെ കാലം ഗണിക്കാനും നൈൽനദിയിലെ വെള്ളപ്പൊക്കം പ്രവചിക്കാനും ദ്വിവർഗ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം കാണാനും

അവർ കണക്ക് ഉപയോഗിച്ചു. പൈതഗോറസ് കണ്ടുപിടിച്ചതെന്ന് തെറ്റായി കരുതപ്പെടുന്ന സിദ്ധാന്തം അവർക്ക് വളരെ നേരത്തെ അറിയാമായിരുന്നു. കൃഷിയിൽ അധിഷ്ഠിതമായ ഈ സംസ്കാരങ്ങൾക്ക് താരാപഥങ്ങളും ഗ്രഹമാർഗങ്ങളും നിരീക്ഷിക്കുകയും രേഖപ്പെടുത്തുകയും ആവശ്യമായി വന്നു. പണം, ചരക്ക് എന്നിവയുടെ ക്രയവിക്രയം, കണക്ക് സൂക്ഷിക്കൽ എന്നീ ആവശ്യങ്ങൾക്കായി കച്ചവടത്തിൽ അവർ അങ്കഗണിതം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി. കൃഷിയിടങ്ങൾക്ക് അതിര് ഉണ്ടാക്കാനും പിരമിഡുകൾ പോലുള്ള സ്മാരകങ്ങൾ പണിയാനും ക്ഷേത്രഗണിതം വേണ്ടിവന്നു.

മിലറ്റസിലെ തേയ്ൽസ് (645-546 B.C.) ആദ്യത്തെ സൈദ്ധാന്തിക ഗണിതകാരനായി കരുതപ്പെടുന്നു. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഉയരം കാണാൻ അതിന്റെ നിഴൽ അളന്ന് അളവുകോലിന്റെ നിഴലുമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ മതിയെന്ന് തേയ്ൽസ് കണ്ടുപിടിച്ചു (ചിത്രം 1). അദ്ദേഹം സൂര്യഗ്രഹണം പ്രവചിച്ചതായും സൂചനയുണ്ട്. തേയ്ൽസിന്റെ ശിഷ്യനായ പൈതഗോറസാണ് ക്ഷേത്രഗണിതം ഗ്രീക്കുകാർക്കിടയിൽ അറിയപ്പെടുന്ന ഒരു ശാസ്ത്രമാക്കി മാറ്റിയതും അപ്രകാരം യൂക്ലിഡ്, ആർക്കിമെഡീസ് എന്നിവർക്ക് വഴി കാട്ടിയതും.

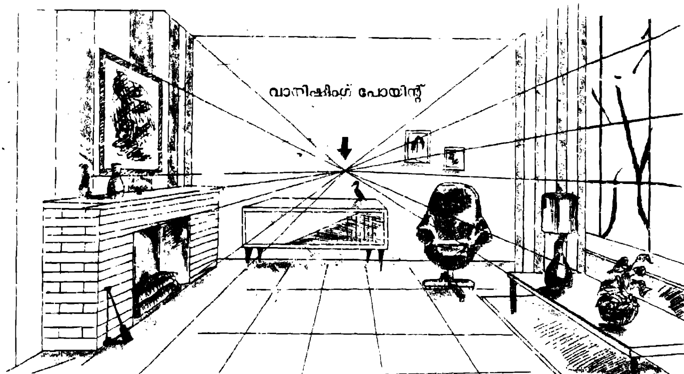


ചിത്രം 1

ബാബിലോണിയക്കാരിൽ നിന്നും കൈപ്പറ്റിയ അറിവിനെ ഗ്രീക്കുകാർ സമൃദ്ധമാക്കി. യുക്തിയിൽ അധിഷ്ഠിതമായ വ്യവസ്ഥ എന്ന നിലയിലേക്ക് ഗണിതത്തെ ഉയർത്തിയത് അവരാണ്. യഥാർഥമെന്ന് ഉറപ്പിച്ച ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളിൽ (അടിസ്ഥാന പ്രമാണങ്ങൾ) നിന്നും ആരംഭിച്ച് ഉത്തരങ്ങളിൽ എത്തുന്ന രീതിയാണ് ഇത് (തെളിവുകൾ).

ഒരു പരിധിവരെ എല്ലാവരും ഗണിതകാരൻമാരാകുന്നു. ജീവിതത്തിൽ നാം പല അവസരങ്ങളിലായി കണക്ക് ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ക്ലോക്ക് നോക്കുമ്പോൾ, സാധനങ്ങൾ വാങ്ങുമ്പോൾ, വില, ബാക്കി എന്നിവ കണക്കാക്കുമ്പോൾ, ഫുട്ബോൾ, ടെന്നീസ്, ക്രിക്കറ്റ് എന്നീ കളികളുടെ സ്കോർ എടുക്കുമ്പോൾ എന്നിങ്ങനെ.

കച്ചവടത്തിലും വ്യവസായത്തിലുമുള്ള അക്കൗണ്ടിങ്ങ് കണക്കിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതാണ്. ഇൻഷുറൻസ് സമ്പ്രദായം പലിശ കണക്കാക്കലിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. സർവേ ത്രികോണമിതിയിൽ ഊന്നിയിരിക്കുന്നു. വിമാനത്തിന്റെയും കപ്പലിന്റെയും ഗതി കണക്കാക്കാൻ പൈലറ്റും നാവികനും ജ്യാമിതി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ത്രിമാന ലോകത്തിലെ വസ്തുക്കളെയും ആളുകളെയും ഒരു പ്രതലത്തിൽ ചിത്രീകരിക്കാനാവശ്യമായ വീക്ഷണകോൺ ചിത്രകാരൻമാർ ഗണിതത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ കണക്കാക്കുന്നു (ചിത്രം 2). സംഗീതത്തിലെ മാത്രയും ലയവും കൗണ്ടർ പോയിന്റും ഗണിതത്തെ അടിസ്ഥാന



ചിത്രം 2

മാക്കിയാണ്. ശാസ്ത്രത്തിൽ ഗണിതം പരമപ്രധാനമാകുന്നു. ശാസ്ത്രത്തിന്റെ രാജ്ഞിയും പരിചാരികയുമെന്ന് എറിക് ടെംപിൾബെൽ എന്ന ഗണിതകാരൻ കണക്കിനെ വിശേഷിപ്പിച്ചു. അളവെടുക്കൽ മുതലായ ഗണിത തന്ത്രങ്ങൾ ഒരു ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. ഒരു രാസവസ്തുവിന്റെ അമ്ലത pH മൂല്യമായി കാണാൻ രസതന്ത്രജ്ഞന്മാർ ലോഗരിഥം ഉപയോഗിക്കുന്നു. സൂര്യചന്ദ്രതാരഗ്രഹാദികളുടെ ചലനം പഠിക്കാൻ വാനനിരീക്ഷകർക്ക് കോണുകളും വിസ്തീർണങ്ങളും അളന്നേ മതിയാകൂ. ജീവശാസ്ത്രത്തിൽ ചില ജീവികളുടെ വളർച്ചാഘടന പഠിക്കാൻ ഡൈമൻഷനൽ അനാലിസിസ് ആവശ്യമാണ്.

ഹൈസ്പീഡ് ഇലക്ട്രോണിക് കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ കൊണ്ട് അതിവേഗം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ നടത്താം. ഗണിതം പ്രയോഗിക്കാവുന്ന മേഖലകളെ വിപ്ലവവത്ക്കരിക്കാൻ ഈ കണ്ടുപിടിത്തം സഹായകരമായി. ജ്യോതിശാസ്ത്ര അളവുകൾ, സമയം അളക്കൽ എന്നിവയ്ക്ക് കൃത്യത ഏറിയതോടെ സമുദ്രയാനം സുഗമമായി. ക്രിസ്റ്റഫർ കൊളംബസിന്റെ കാലം തൊട്ട് മനുഷ്യൻ പുതുദേശങ്ങൾ തേടുകയും ഭൂപടങ്ങൾ നിർമിക്കുകയും ചെയ്തു. കപ്പൽ, തീവണ്ടി എഞ്ചിൻ, കാർ, വിമാനം, റഡാർ എന്നിവ ഡിസൈൻ ചെയ്യാനും ചന്ദ്രനിലേക്കും ഗ്രഹങ്ങളിലേക്കും കൃത്രിമോപഗ്രഹങ്ങൾ വിക്ഷേപിക്കാനും ഗണിതം ഉപയുക്തമായി. ഗണിതത്തിന്റെ സാധ്യതകൾ ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ഇപ്രകാരമൊക്കെയാണ്.

2
സംഖ്യകൾ

സംഖ്യകൾ സർവത്ര!

ജീവിതം സംഖ്യകളാൽ നിയന്ത്രിക്കപ്പെടുന്നു. ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം.

- ഓഫീസിലേക്ക് പോകേണ്ട ഒരാളെ അലാം ഉണർത്തുന്നു. *"ആറ് മണി. എഴുന്നേല്ക്കാറായി."* അയാളുടെ ദിവസം ആരംഭിക്കുന്നു.
- ബസ്സ് കണ്ടക്ടർ : *"നാല്പത് പൈസ കൂടി തരണം."*
  യാത്രക്കാരൻ : *"എന്തിന്? ഞാൻ മുഴുവൻ ചാർജും തന്നല്ലോ?"*
  കണ്ടക്ടർ : *"ചാർജ് ഇരുപത്തഞ്ച് ശതമാനം വർധിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്."*
  യാത്രക്കാരൻ : *"ഓ! അത് ശരി."*
- പാൽ ബൂത്തിൽ ഒരു വീട്ടമ്മ: *''രണ്ട് ലിറ്ററിന്റെ ഒരു പാക്കറ്റ് തരൂ."*
  "രണ്ട് ലിറ്റർ പാക്കറ്റ് ഇല്ല."
  "എങ്കിൽ ഒരു ലിറ്ററിന്റെ ഒരു പാക്കറ്റും രണ്ട് അര ലിറ്റർ പാക്കറ്റുകളും തരൂ."
- റസ്റ്റോറന്റിൽ ബില്ല് പരിശോധിച്ച് ഒരാൾ :*''വെയ്റ്റർ നിങ്ങൾ കൂട്ടിയിരിക്കുന്നത് ശരിയല്ല. ഒമ്പത് രൂപ അമ്പത് പൈസയ്ക്ക് പകരം എട്ട് രൂപ അമ്പത് പൈസയേ വരൂ."*
  "സോറി, സർ!"

സംഖ്യകൾ കടന്നു വരുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾക്ക് ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളാണ് മേൽ കാണിച്ചത്. അത്ര സാധാരണമല്ലാത്ത സന്ദർഭങ്ങളിലും സംഖ്യകൾക്ക് പ്രാമുഖ്യമുണ്ട്. 0.001 സെക്കന്റിന്റെ വ്യത്യാസം സ്പ്രിന്റർക്ക് സ്വർണമെഡൽ നേടിക്കൊടുക്കുകയോ നഷ്ടമാക്കുകയോ ചെയ്യാം. ഒരു സെന്റിമീറ്ററിന്റെ ആയിരത്തിലൊരംശം വ്യത്യാസം വാച്ചിലെ പൽചക്രത്തെ ഉപയോഗശൂന്യമാക്കാം. ടെലഫോൺ നമ്പർ, റേഷൻകാർഡ്

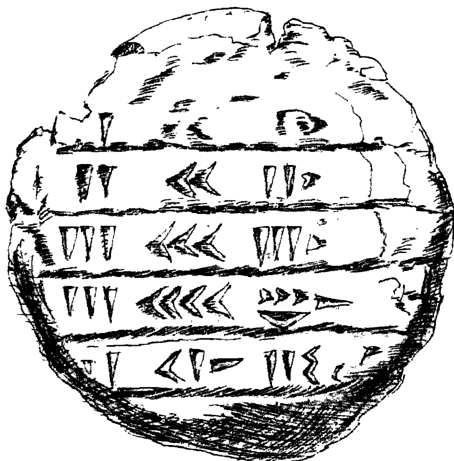
നമ്പർ, ബാങ്ക് അക്കൗണ്ട് നമ്പർ, പരീക്ഷാ നമ്പർ എന്നിവ ഒരാളെ തിരിച്ചറിയാനുള്ള സൂചകങ്ങളായി ഉപയോഗിക്കാറുണ്ടല്ലോ.

സംഖ്യകൾക്ക് പഴക്കമെത്ര? ആരാണ് സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചത്? സംഖ്യകളുടെ ഉദ്ഭവം എപ്രകാരമാണ്? ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾ മനസ്സിലെത്താം. ഉത്തരങ്ങൾ ചോദ്യങ്ങളെപ്പോലെ രസകരമാണ്. സംഖ്യകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന ഏതാനും വസ്തുതകൾ പരിശോധിക്കാം.

സംഖ്യകളുടെ ആവിർഭാവം

മനുഷ്യസംസ്കാരത്തോളം പഴക്കം സംഖ്യകൾക്ക് ഉണ്ട്. ഓക്സ്ഫോർഡിലെ ആഷ്മോളിൻ മ്യൂസിയത്തിൽ ഒരു ഈജിപ്ഷ്യൻ ചെങ്കോൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. 1,20,000 തടവുകാർ; 4,00,000 കാളകളും 14,22,000 ആടുകളും അടങ്ങുന്ന കൊള്ളമുതൽ. ഇത്രയുമാണ് അതിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ഈ രേഖയ്ക്ക് 3400 B.C. യോളം പഴക്കം കാണും. വളരെ പണ്ട് മുതലേ മനുഷ്യർക്ക് വലിയ സംഖ്യകൾ എഴുതാനാകുമെന്നതിന് ഇതൊരു തെളിവായി കണക്കാക്കാം. ഈജിപ്തുകാർക്ക് മുമ്പുതന്നെ, സംഖ്യകളുടെ ഉപയോഗം നിലവിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകണം.

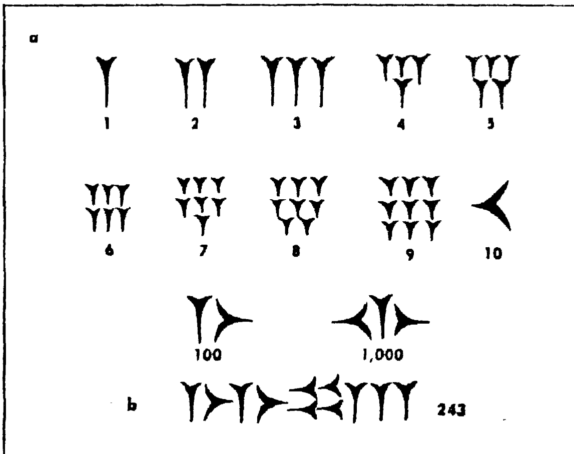
പ്രാകൃതമനുഷ്യന് എണ്ണമെടുക്കൽ പ്രധാനമായിരുന്നില്ല.



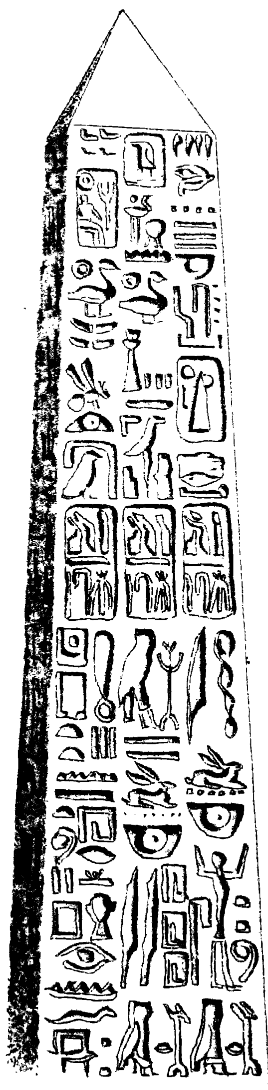
ചിത്രം 3

അവന് വീട് ഗുഹയും ഭക്ഷണം മരങ്ങളിലും ചെടികളിലും കായ്ക്കുന്നതോ വേട്ടയാടി കിട്ടുന്നതോ ആയിരുന്നു. ഏകദേശം പതിനായിരം വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് മനുഷ്യൻ ഗ്രാമങ്ങളിൽ താമസമുറപ്പിക്കുകയും കൃഷി, കന്നുകാലി വളർത്തൽ എന്നിവ ആരംഭിക്കുകയും ചെയ്തു. ജീവിതം സങ്കീർണമായി. നിത്യവൃത്തിയും സാമൂഹ്യ ജീവിതവും കുടുംബജീവിതവും ക്രമപ്പെടുത്തേണ്ടതായി വന്നു. കന്നുകാലികളെ എണ്ണണം, കാർഷികോത്പന്നങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്തണം, നിലം അളക്കണം, കാലം അറിയണം. ഇതിനെല്ലാം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നു.

ബാബിലോണിയ, ഈജിപ്ത്, ഇന്ത്യ, ചൈന എന്നീ സംസ്കാരങ്ങൾ നിലവിൽ വന്നു. ഏകദേശം ഒരേ കാലത്തു തന്നെ ഓരോ സംസ്കാരവും തനതായ പ്രാകൃതസംഖ്യകൾ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ബാബിലോണിയയിലെ പൗരാണിക കളിമൺ പ്രതിമകളിൽ സംഖ്യകൾ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട് (ചിത്രം 3). ആപ്പിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള (ക്യൂണിഫോം) ലിപി അവർ കണ്ടെത്തി. നനഞ്ഞ കളിമൺ ഫലകങ്ങളിൽ കൂർത്ത കമ്പുകളാൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതീകങ്ങൾ കോറി ഇഷ്ടികകളാക്കി മാറ്റലയിരുന്നു രീതി. ഓരോ സംഖ്യക്കും പ്രത്യേക ചിഹ്നങ്ങളായിരുന്നു. ഒന്ന് (Y) പത്ത് (<) നൂറ് (Y>) എന്നിങ്ങനെ. വലിയ സംഖ്യ



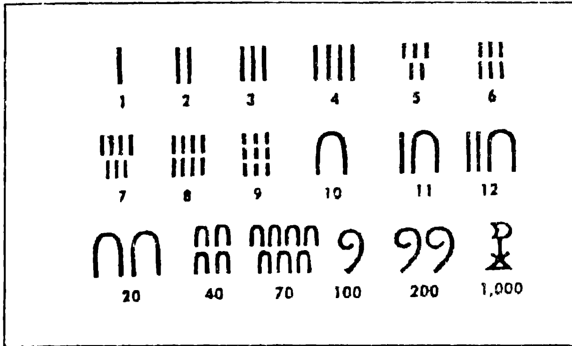
ചിത്രം 4



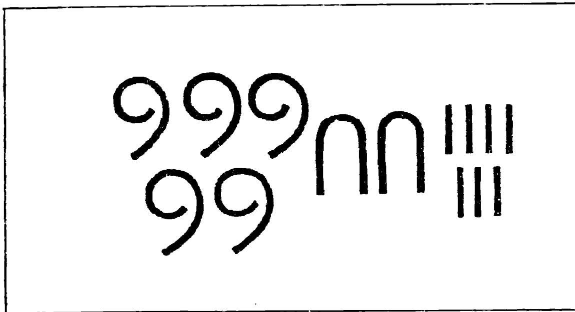
ചിത്രം 5

കൾ എഴുതാൻ അവർ പ്രതീകങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു. ഉദാഹരണമായി ആയിരം എന്ന് എഴുതുന്ന വിധം നോക്കാം. < ϒ > എന്ന ലിപി കൊണ്ടോ നൂറ് പത്ത് തവണ എഴുതിയോ ആയിരം എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം (ചിത്രം 4). എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഒന്നു മുതൽ അറുപത് വരെയായിരുന്നു. കൂടുതൽ വലിയ സംഖ്യകളെ അറുപതിന്റെ ഗണങ്ങളായി എണ്ണി. അതായത് ഇപ്പോൾ നാം പത്തിന്റെ ഗണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന വിധത്തിൽ. ഈജിപ്തുകാരും വലിയ സംഖ്യകൾ എണ്ണാൻ പ്രാപ്തരായിരുന്നു. ഒരു വർഷത്തിൽ മൂന്നൂറ്റിയറുപത്തഞ്ച് ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നും അവർ കണ്ടുപിടിച്ചു. ഒബിലിസ്ക്കുകൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്ന സ്മാരകങ്ങളിൽ ക്യൂണിഫോം സമ്പ്രദായമനുസരിച്ചാണ് അവർ എഴുതിയത് (ചിത്രം 5). വലിയ സംഖ്യകൾ രേഖപ്പെടുത്താൻ ഈ സമ്പ്രദായം വിഷമം പിടിച്ചതായിരുന്നു (ചിത്രം 6a). 527 എന്ന് എഴുതുന്ന വിധം നോക്കുക (ചിത്രം 6b).

പ്രാചീന ജനതകൾ ഏതാനും പ്രാഥമിക എണ്ണൽ സംഖ്യകളേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നുള്ളൂ. ഇരുപതിൽ കൂടുതൽ എണ്ണാൻ കഴിയാത്ത ഗോത്രങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. പത്തിലോ അഞ്ചിലോ കൂടുതൽ എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാൻ അറിയാത്ത വംശങ്ങളും ഉണ്ടായിരുന്നു. ഇരുപത് വരെ മാത്രം എണ്ണാൻ കഴിയുന്ന ഗ്രാമീണ ജനതകളും നാലു



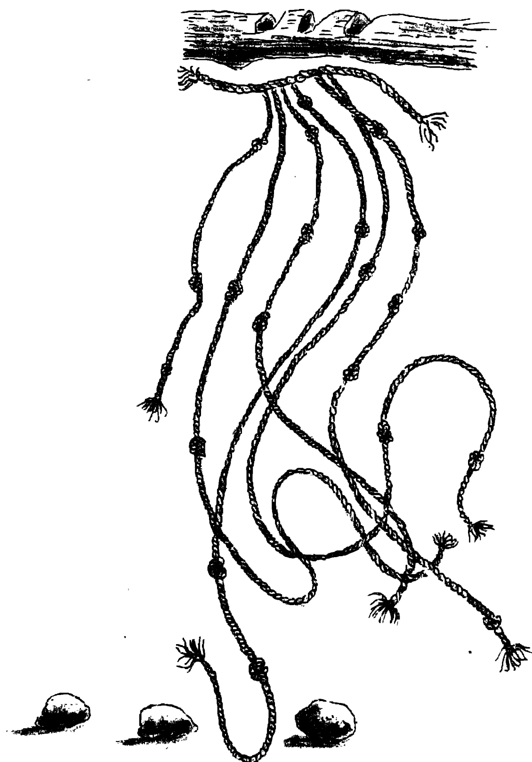
ചിത്രം 6a



ചിത്രം 6b

വരെ മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്ന ഗോത്രങ്ങളും ഇക്കാലത്തും നില വിലുണ്ട്. എണ്ണൽ പഠിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്ന കുട്ടികൾ പത്തിൽ കൂടു തൽ എണ്ണാൻ വിഷമിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

നിലത്ത് ഓരോ കല്ലുകൾ മാറ്റിവെച്ച് അല്ലെങ്കിൽ കയറിൽ കെട്ടുകൾ ഇട്ട് മനുഷ്യൻ മൃഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കി. ഒരു കല്ല് അല്ലെങ്കിൽ കയറിലെ കെട്ട് ഒരു മൃഗത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്തു. പിന്നീട് പത്ത് വിരലുകൾ എണ്ണാൻ ഉപയോഗിച്ചിരിക്ക ണം. പത്ത് വിരലുകളും എണ്ണിക്കഴിഞ്ഞാൽ പത്തിന് പകരമായി ഒരു കല്ല് മാറ്റി വെക്കുന്നു. വിരലുകൾ കൊണ്ട് അടുത്ത പത്ത് എണ്ണുകയും വീണ്ടും ഒരു കല്ല് മാറ്റിവെക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇപ്ര കാരം പത്ത് കല്ലുകൾ പത്ത് പത്തുകളുടെ കൂട്ടമാകും. ഈ കൂട്ട

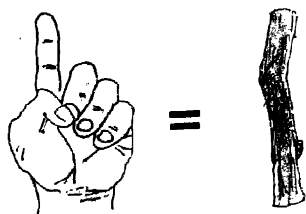


ചിത്രം 7

ത്തിന് പകരം വലിയൊരു കല്ല് നൂറെന്ന് കണക്കാക്കി പകരം വെക്കാം. മൂന്ന് വലിയ കല്ലുകൾ, ഏഴ് ചെറിയ കല്ലുകൾ, ഏട്ട് വിരലുകൾക്ക് പകരം എട്ട് കമ്പുകൾ എന്നുള്ള കൂട്ടം ഏത് സംഖ്യയെ പ്രതിനിധീകരിക്കും? മൂന്ന് നൂറുകളും ഏഴ് പത്തുകളും ഏട്ട് ഒറ്റകളും. അതായത് 378. എല്ലാ പ്രാകൃത ഗോത്രങ്ങളും എണ്ണാൻ അടിസ്ഥാനമാക്കിയത് വിരലുകളോ പത്ത് എന്ന സംഖ്യ യോ ആകണമെന്നില്ല. ചിലർ വിരലുകൾക്ക് പകരം രണ്ട് കൈ കൾ, മറ്റു ചിലർ കാലുകൾ കൂടി ഉപയോഗിച്ചിരിക്കാം.

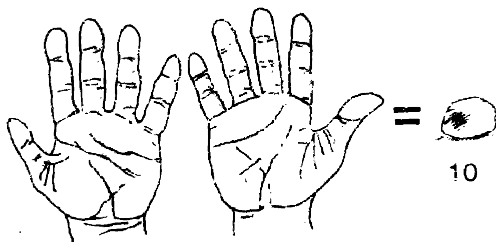
കല്ലുകളുടെയും കമ്പുകളുടെയും ഉപയോഗം പ്രായോഗിക മായി എളുപ്പമല്ല. എഴുത്ത് പഠിച്ചതോടെ മനുഷ്യൻ സംഖ്യകൾക്ക് പ്രതീകങ്ങൾ സൃഷ്ടിച്ചു.

A



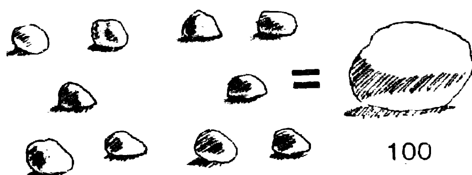
1

B



10

C



100

ചിത്രം 8







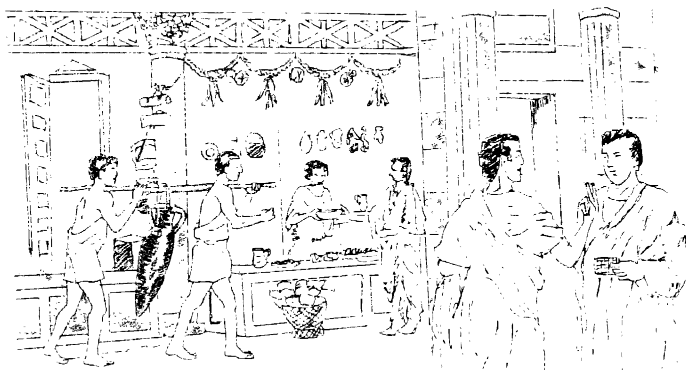
= 378



ചിത്രം 9

സംഖ്യകൾ എഴുതൽ

ഇന്ത്യ, ചൈന തുടങ്ങിയ പുരാതന സംസ്കാരങ്ങൾ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ അവരുടേതായ വ്യവസ്ഥകൾ രൂപപ്പെടുത്തി. ഇന്ത്യക്കാരും ഈജിപ്തുകാരും പത്തിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് എണ്ണിയത്. ഒന്ന് മുതൽ പത്ത് വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എണ്ണാൻ ആധാരമാക്കി, കൂടുതൽ വലിയ സംഖ്യകളെ പത്തിന്റെ ഗണങ്ങളായി കണക്കാക്കി. തെക്കെ അമേരിക്കയിലെ മയാ വർഗക്കാർക്ക് ആധാര സംഖ്യ 20 ഉം സിറിയക്കാർക്ക് 2 ഉം ആയിരുന്നു.



ചിത്രം 10

ഗ്രീക്കുകാർ, റോമക്കാർ (ചിത്രം 10) എന്നിവർ അക്ഷരമാലയിലെ ലിപികൾ കൊണ്ടുതന്നെ സംഖ്യകളും എഴുതി. അക്ഷരമാലയിലെ എല്ലാ ലിപികളും അവയ്ക്ക് പുറമെ മൂന്ന് പ്രതീകങ്ങളും ചേർന്നതായിരുന്ന ഗ്രീക്കുകാർക്കിടയിൽ പ്രചാരം നേടിയ

A	B	Γ	Δ	E	F*	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50

Ξ	O	Π	Q*	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ*
60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900

ചിത്രം 11

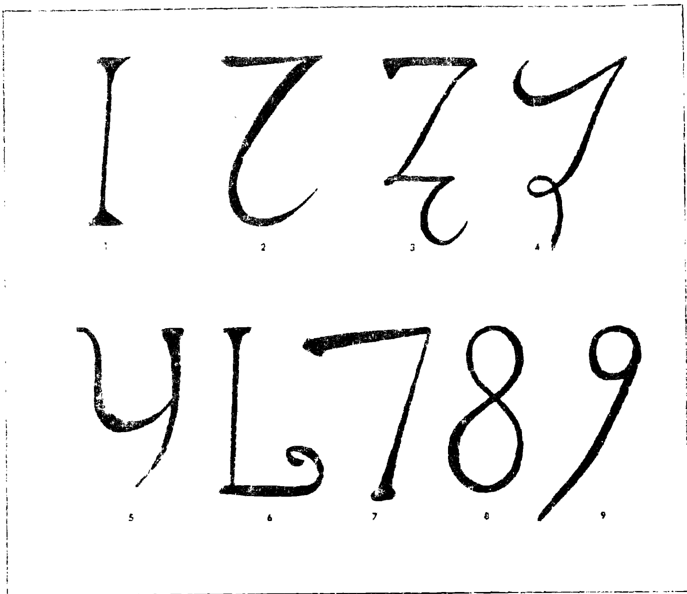
രീതി. ഓരോ അക്ഷരവും ഒരു പ്രത്യേക മൂല്യം സൂചിപ്പിച്ചു. ആദ്യത്തെ ഒമ്പത് അക്ഷരങ്ങൾ ഒന്ന് മുതൽ ഒമ്പത് വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ കാണിച്ചു. തുടർന്നുള്ള ഒമ്പത് അ ക്ഷരങ്ങൾ 10 മുതൽ 90 വരെയുള്ള പത്തിന്റെ ഗണങ്ങൾ പ്രതിനിധാനം ചെയ്തു. പൂജ്യത്തിന് പ്രതീകം ഉണ്ടായിരുന്നില്ല (ചിത്രം 11). I (ഒന്ന്), V(അഞ്ച്), C (നൂറ്), M (ആയിരം) എന്നീ റോമൻ ലിപികൾ ഇന്നും പ്രചാരമുള്ളവയാണല്ലോ (ചിത്രം 12). പക്ഷെ വലിയ സംഖ്യകൾ എഴുതാനും കൂട്ടാനും ഈ സമ്പ്രദായം വിഷമകരമായിരുന്നു.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	3	4	5	6	7	8	9

X	XX	L	C	D	M	CMC
10	20	50	100	500	1,000	10,000

ചിത്രം 12

ലളിതവും പൂർണവുമായ സംഖ്യാസമ്പ്രദായം വികസിപ്പിച്ചത് ഹിന്ദുക്കളാണ്. ലോകം മുഴുവൻ സ്വീകരിച്ചതും ഇന്ന് നിലവിലിരിക്കുന്നതും അത് തന്നെ. B.C. 100 മുതൽ A.D. 200 വരെയുള്ള കാലയളവിൽ അവർ ഒന്ന് മുതൽ പത്ത് വരെയുള്ള സംഖ്യകൾക്ക് പ്രതീകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി. അറബികൾ ഈ സമ്പ്രദായം സ്വീകരിച്ചു. എട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ അറബികൾ സ്പെയിനിന്റെ ഭൂരിഭാഗവും കീഴടക്കിയതോടെ ഹിന്ദു-അറബി സംഖ്യകൾ ആ ഭാഗങ്ങളിൽ പ്രചാരം നേടി (ചിത്രം 13). സാവകാശം മറ്റ് യൂറോപ്യൻ ജനതകളും ഈ സമ്പ്രദായം സ്വീകരിച്ചു. പതിനഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ടായപ്പോഴേക്കും ഇപ്പോൾ നിലവിലുള്ള രൂപം പ്രതീകങ്ങൾ നേടിക്കഴിഞ്ഞു (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0). തുടക്കത്തിൽ 20,30,40 തുടങ്ങിയ സംഖ്യകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പ്രതീകങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. പിന്നീടുള്ള നൂറ്റാണ്ടുകളിൽ ഉദ്ഭവിച്ച വിപ്ലവകരമായ രണ്ട് ആശയങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ മുഖഛായ മാറ്റിക്കളഞ്ഞു. പത്തിന്റെ ഗണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക - നൂറ് എന്നാൽ പത്ത് പത്തുകൾ, ആയിരം എന്നാൽ പത്ത് നൂറുകൾ എന്ന പ്രകാരത്തിൽ - ഓരോ ഗണത്തിനും പ്രത്യേക സ്ഥാനം നൽകുക എന്നതായിരുന്നു ഒന്നാമത്തെ ആശയം. അതായത് സ്ഥാനങ്ങളിൽ എത്ര



ചിത്രം 13

പത്തുകളും നൂറുകളും ആയിരങ്ങളും ഉണ്ടെന്ന് ഒന്നു മുതൽ ഒമ്പത് വരെയുള്ള സംഖ്യകളാൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 20, 30 തുടങ്ങിയ സംഖ്യകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പ്രതീകങ്ങൾ വേണ്ടെന്ന് വന്നു. സ്ഥാന മൂല്യ നിർണയനം എന്നാണ് ഈ സമ്പ്രദായത്തിന് പേർ. ഒരു ഗ്രൂപ്പിലെ ഒഴിഞ്ഞ സ്ഥാനം പൂജ്യം കൊണ്ട് കാണിക്കാമെന്ന രണ്ടാമത്തെ ആശയം കൂടുതൽ പ്രശസ്തമായി. ഒന്നുമില്ല എന്ന അർഥമുള്ള 'ശൂന്യ' എന്ന വാക്കിന് പകരമാണ് 0. ഒന്നുമുതൽ ഒമ്പത് വരെയുള്ള സംഖ്യകളെ 'ഏകക്', പത്തിന്റെ ഗണത്തെ 'ദശക്', നൂറിന്റെ ഗണത്തെ 'ശതക്' എന്ന ക്രമത്തിൽ നാമകരണം ചെയ്തു. പത്തിന്റെ രണ്ട് ഗണങ്ങളും ഏകകത്തിന്റെ സ്ഥാനം ശൂന്യവുമായ ഒരു സംഖ്യയെ 20 എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്. 307 എന്നാൽ മൂന്ന് നൂറുകൾ, പത്തിന്റെ ഗ്രൂപ്പുകൾ ഇല്ല, ഏഴ് ഒറ്റകൾ എന്ന് മനസ്സിലാക്കണം. ഏകകസ്ഥാനം വലത്ത്, പത്തിന്റെ സ്ഥാനം ഏകകത്തിന്റെ ഇടത്ത്, നൂറ് അതിന്റെയും

ഇടത്ത് എന്ന മട്ടിലാണ് സംഖ്യകൾ എഴുതുക. അക്കങ്ങളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ എപ്രകാരമെന്ന് താഴെ കാണിക്കാം.

ആയിരങ്ങൾ	*നൂറുകൾ*	*പത്തുകൾ*	*ഏകകങ്ങൾ*
1000	100	10	1

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഏകകങ്ങൾ, പത്തുകളുടെ എണ്ണം നൂറുകളുടെ എണ്ണം, ആയിരങ്ങളുടെ എണ്ണം - ഇതാണ് ക്രമം. 0 ഒരു ശൂന്യ സ്ഥാനത്തിന് പകരമാണ്. 85,406 എഴുതുന്നത് നോക്കുക.

10,000	*1,000*	*100*	*10*	*1*
8	5	4	0	6

85,406 - നെ (8×10,000) + (5×1000) + (4×100) + (0×10) + (6×1) എന്ന് വിഭജിച്ച് എഴുതാവുന്നതാണ്. അതായത് 8 എന്ന സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനവില 80,000; 5-ന്റെ സ്ഥാനവില 5000 എന്ന പ്രകാരം.

ഇന്ത്യക്കാരുടെ രീതിയുടെ വിപ്ലാവാത്മകത കാരണം മറ്റെല്ലാ സമ്പ്രദായങ്ങളും തിരസ്ക്കരിക്കപ്പെട്ട് ലോകമെമ്പാടും അത് സ്വീകരിക്കപ്പെട്ടു. സംഖ്യകൾ എഴുതുന്നതിലെ പ്രയാസങ്ങൾ ഇല്ലാതായി. ഏത് വലിയ സംഖ്യയും എളുപ്പം എഴുതാമെന്ന് വന്നു. അബാക്കസ് തുടങ്ങിയ ഉപകരണങ്ങളുടെ സഹായം കൂടാതെ തന്നെ കടലാസും പേനയും കൊണ്ട് കണക്ക് കൂട്ടലുകൾ നടത്താം എന്നായി. ആധുനിക ഇൻഡെക്സ് നൊട്ടേഷനിൽ ഗ്രൂപ്പുകൾ പത്തിന്റെ ഘാതങ്ങളായി കാണിക്കുന്നു. പത്തിനെ ആധാരമാക്കുന്ന ഈ സമ്പ്രദായമാണ് ഡസിമൽ സിസ്റ്റം (Decimal System) അഥവാ ദശാംശ സമ്പ്രദായം. സ്ഥാനവിലകൾ എഴുതുന്നത് താഴെ കാണും വിധമാണ്.

10^7 10^6 10^5 10^4 10^3 10^2 10^1 10^0

സംഖ്യയെ എത്ര സ്ഥാനം വരെ വലുതാക്കാനും ഈ രീതിക്ക് സാധ്യമാണ്. 1,000,000,000,000,000,000 എന്ന സംഖ്യക്ക് പരാർധ എന്ന പേർ ഇന്ത്യക്കാർ നൽകി. അതായത് ഒരു മില്ല്യൺ മില്ല്യൺ മില്ല്യൺ.

പത്ത് കൂടാതെയുള്ള അംശ സമ്പ്രദായങ്ങൾ

ദശാംശസമ്പ്രദായം സാർവത്രികമാകുന്നു എന്നതാണ് അതിന്റെ മെച്ചം. സ്ഥാനവില, പൂജ്യം എന്നീ ആശയങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ ഏത് സംഖ്യയേയും പത്ത് അടിസ്ഥാനമല്ലാത്ത

അംശ സമ്പ്രദായങ്ങളിലും എഴുതാവുന്നതാണ്. അഞ്ച് ആധാരമാക്കുന്ന രീതിയിൽ സ്ഥാനങ്ങൾ അഞ്ചിന്റെ ഘാതങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

5^6 5^5 5^4 5^3 5^2 5^1 5^0

ഈ സമ്പ്രദായത്തിൽ 1, 2, 3, 4, 0 എന്നീ അക്കങ്ങളേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ. ഏകകസ്ഥാനത്ത് 1 മുതൽ 4 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ, 5^2 ന്റെ സ്ഥാനത്ത് 5 ന്റെ 5 ഗ്രൂപ്പുകൾ എന്നിങ്ങനെ. ഈ രീതിയിൽ എഴുതിയ 4203 എന്ന സംഖ്യ പരിശോധിക്കാം. 5^3 ന്റെ നാലു ഗ്രൂപ്പുകളും, 5^2 ന്റെ രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളും 5^1 ന്റെ പൂജ്യം ഗ്രൂപ്പുകളും മൂന്ന് ഘടകങ്ങളും ചേർന്നതാണ് ഈ സംഖ്യ.

5^3	5^2	5^1	5^0
4	2	0	3

ദശാംശ സമ്പ്രദായത്തിലേക്ക് മാറ്റിയാൽ ഈ സംഖ്യ എത്രയാകും? $(4\times125) + (2\times25) + (0\times5) + 3 = 553$.

2-നെ ആധാരമാക്കിയുള്ള സമ്പ്രദായത്തിൽ 0,1 എന്ന അക്കങ്ങൾ മാത്രമേ ഉള്ളൂ. സ്ഥാനങ്ങൾ രണ്ടിന്റെ ഘാതങ്ങളും. 553 എന്ന സംഖ്യ ദ്വയാംശ സമ്പ്രദായത്തിൽ എഴുതുന്നത് നോക്കൂ.

2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1

അതായത്

$(1 \times512) + (0\times256) + (0\times128) + (0\times64) + (1\times32) + (0\times16) + (1\times8) + (0\times 4) + (0\times2) + 1 = 553$

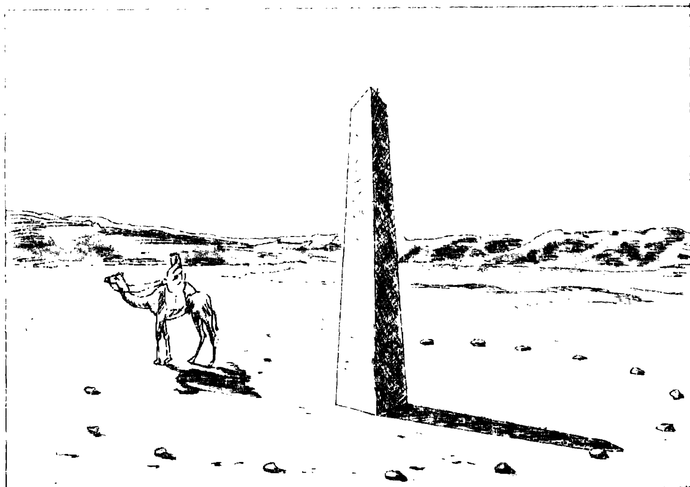
ഈ സമ്പ്രദായം കൂടുതൽ വിശദമായി പിന്നീട് ചർച്ച ചെയ്യുന്നതാണ്.

ഗണിതത്തിന്റെ ചരിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും സുപ്രധാന കണ്ടുപിടിത്തമാണ് പൂജ്യം കണ്ടെത്തിയത്. ഭാരതീയർ ഗണിതത്തിന് നൽകിയ സംഭാവന പൂജ്യമാണ് എന്ന് ഫലിതരൂപേണ പറയാറുണ്ട്. “ഹിന്ദുക്കൾ പൂജ്യം എന്ന ചിഹ്നം കണ്ടുപിടിച്ചതിനേക്കാൾ വിപ്ലവകരമായ മറ്റൊരു കാൽവെയ്പ് ഗണിതത്തിന്റെ മുഴുവൻ ചരിത്രം പരിശോധിച്ചാലും കണ്ടെത്താനാകില്ല.” ഒരു അമേരിക്കൻ ഗണിത ചരിത്രകാരന്റെ വാക്കുകളാണ് ഇവ. മഹാനായ ഗണിതകാരൻ ലാപ്ലാസ് പറയുന്നത് നോക്കുക. “ഒരേ സമയം സ്ഥാന വിലയും കേവല വിലയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന പത്ത് പ്രതീക

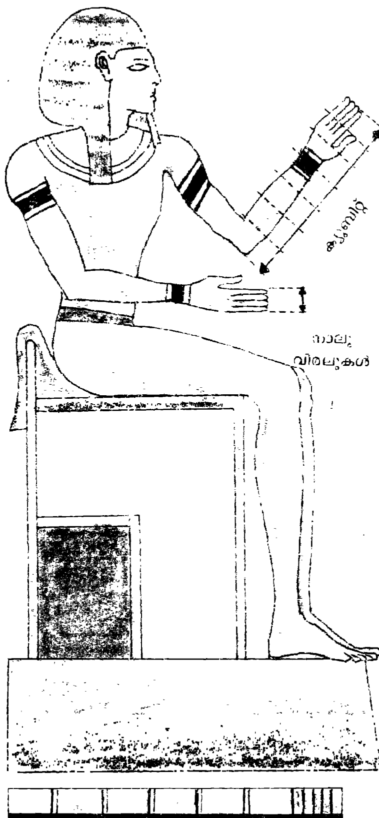
ങ്ങൾ കൊണ്ട് എല്ലാം സംഖ്യകളും എഴുതാം എന്ന കുറ്റമറ്റ സമ്പ്രദായം നമുക്ക് നൽകിയത് ഇന്ത്യയാണ്. ഇപ്പോൾ വളരെ ലളിതം എന്ന തോന്നൽ കൊണ്ടാണ് അഗാധവും സുപ്രധാനവുമായ ഈ ആശയത്തിന്റെ യഥാർഥ മൂല്യം നാം അവഗണിക്കുന്നത്. ഈ നേട്ടത്തിന്റെ ഗാംഭീര്യം നാം അംഗീകരിച്ചേ മതിയാകൂ. കാരണം ആർക്കിമെഡീസ്, അപ്പോളോനീയസ് എന്ന മഹാപ്രതിഭകൾക്ക് കൂടി ചെയ്യാനാകാത്ത കാര്യമായിരുന്നു അത്."

ഗണിതക്രിയകൾ

ഗണിതം ജീവിതത്തിന് ഉപയുക്തമെന്നിരിക്കെ അത് ഉരുത്തിരിഞ്ഞതും ജീവിതത്തിൽ നിന്നാണ്. സാമൂഹ്യപരവും വ്യക്തിപരവുമായ കാര്യങ്ങൾ ക്രമപ്പെടുത്താൻ മനുഷ്യൻ ഗണിതം സൃഷ്ടിച്ചു. പ്രാകൃതമനുഷ്യരുടെ ജീവിതം പ്രവൃത്തികൾ നിറഞ്ഞതായിരുന്നു. മൃഗങ്ങളുടെയും ഗോത്രത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെയും എണ്ണം അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടത് അവശ്യമായിരുന്നു. ഗൃഹനിർമാണം, കൃഷിയിടം ഒരുക്കൽ, മതപരമായ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് അൾത്താര ഉയർത്തൽ ഇതിനെല്ലാം വിസ്തീർണം അളക്കണം. കാർഷികോത്പന്നങ്ങളുടെ അളവ് കണക്കാക്കണം. വസ്തുക്കളുടെ ഭാരം നിർണയിക്കണം. സുപ്രധാനമായ മറ്റൊന്ന് സമയം കണക്കാക്ക



ചിത്രം 14



ചിത്രം 15

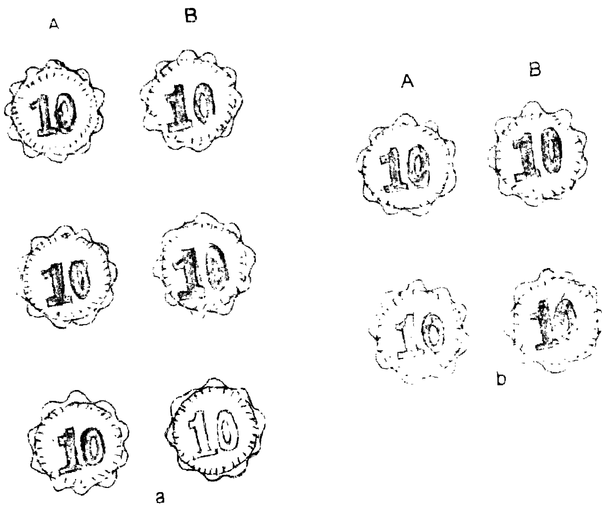
ലാണ്. സമയമളക്കാൻ വൈവിധ്യമാർന്ന രീതികൾ മനുഷ്യൻ വികസിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈജിപ്തുകാർ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന ഒബിലിസ്ക് (നിഴൽ ഘടികാരം) സൂര്യപ്രകാശം സൃഷ്ടിക്കുന്ന നിഴലിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കുന്നു. ഉദയസൂര്യനും അസ്തമന സൂര്യനും വീഴ്ത്തുന്ന നിഴലുകൾക്ക് ഇടയിലെ അകലം മണിക്കൂറുകളായി വിഭജിച്ചു (ചിത്രം 14). ഒരു സമ്പ്രദായത്തിലെ അളവുകൾ മറ്റൊന്നിലേക്ക് മാറ്റാനുള്ള മാനദണ്ഡങ്ങളും മനുഷ്യൻ കണ്ടെത്തി. ഈജിപ്ഷ്യൻ പുരോഹിതരുടെ ലോഹദണ്ഡിൽ (ഒരു ക്യൂബിറ്റിന് തുല്യം) ചെറിയ വിഭാഗങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയിരുന്നു. ക്യൂബിറ്റിലെ ഓരോ വിഭാഗവും യഥാർഥത്തിൽ നാല് വിരലുകൾ ചേർത്ത് വെച്ചാലുള്ള വീതിയാണ് (ചിത്രം 15). സംഖ്യകൾ മാത്രമല്ല,അവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകളും വിവിധ കൃത്യങ്ങൾ നിറവേറ്റാൻ അവർക്ക് ആവശ്യമായി വന്നു.

സംഖ്യകളുടെയും ക്രിയകളുടെയും ഉപയോഗത്തിൽ ഒരു ലളിത തത്വമാണ് അടങ്ങിയിരിക്കുന്നത്. അതായത് വസ്തുക്കളെ രണ്ട് കൂട്ടങ്ങളായും ഒന്നിനോടൊന്ന് ജോടികളായും വേർതിരിക്കൽ. താരതമ്യത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ഗണമായി എളുപ്പം സിദ്ധമായത് പത്ത് വിരലുകളായിരുന്നു. ഒരു വിരൽ - ഒരു വസ്തു; രണ്ട് വസ്തുക്കൾ - രണ്ട് വിരലുകൾ എന്ന ജോടികൾ കൊണ്ട്

ഒന്ന് മുതൽ പത്ത് വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഉൾക്കൊള്ളാൻ കഴിഞ്ഞു. രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ വലിപ്പം താരതമ്യം ചെയ്തത് ഇപ്രകാരം ജോടി തിരിച്ചാണ്. ജോടി തിരിക്കാനാകാതെ കൂടുതൽ വസ്തു അവശേഷിച്ചാൽ അത് വലിയ ഗണം എന്ന് സങ്കല്പിക്കപ്പെട്ടു. ശിഷ്ടമില്ലാതെ ജോടി തിരിക്കാമെങ്കിൽ രണ്ട് ഗണവും തുല്യമെന്നും മനസ്സിലാക്കി. മനസ്സിന്റെ നൈസർഗികവും സവിശേഷവുമായ ബോധമാണ് ഒന്നിനോടൊന്ന് ജോടിയാക്കി താരതമ്യം ചെയ്യൽ. ഒന്നിനൊന്ന് പൊരുത്തം എന്ന ഈ ആശയം ഗണിതത്തിലെ എല്ലാ വളർച്ചയുടെയും പുറകിലുണ്ട്. ഒരു വസ്തുവിനെയും ഒരു സംഖ്യയേയും ജോടിയാക്കാൻ നമ്മെ പ്രാപ്തരാക്കുന്നത് ഇതേ ആശയം തന്നെ.

വസ്തുവിനെ സവിശേഷമായി തിരിച്ചറിയലാണ് അടുത്ത പടി. ഒരു പോസ്റ്റ് ഓഫീസിന്റെ പിൻകോഡ് നമ്പർ അതിനെ തിരിച്ചറിയാനുള്ള ഉപാധിയാണ്. പരീക്ഷാ റോൾ നമ്പർ പരീക്ഷ എഴുതുന്ന ആളുടെയും ഒരു സംഖ്യയുടെയും ഇടയ്ക്ക് കോഡായി പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ടെലഫോൺ നമ്പർ, റേഷൻ കാർഡ് നമ്പർ എന്നിവ ഒരാളെ തിരിച്ചറിയാൻ സഹായിക്കുന്നതും ഇപ്രകാരം തന്നെ. ഒരു പ്രോഗ്രാമിനും അത് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന വസ്തുതകൾക്കും സംഖ്യകൾക്കും ഇടയ്ക്കുള്ള കോഡിനെ ആശ്രയിച്ചാണ് ഒരു കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ പ്രവർത്തന തത്വം നില കൊള്ളുന്നത്.

ആദ്യകാലങ്ങളിൽ എണ്ണാനുള്ള വസ്തുക്കളെ ജോടി തിരിക്കാൻ കോലുകൾ, കല്ലുകൾ എന്നിവ വേണ്ടി വന്നു. സങ്കലനത്തിന്റെ ഏറ്റവും അടിസ്ഥാനപരവും ലളിതവുമായ പ്രക്രിയ വസ്തുക്കളെ രണ്ട് കൂട്ടങ്ങളായി ജോടി തിരിക്കലാണ്. മൂന്ന് വീതവും രണ്ട് വീതവും നാണയങ്ങൾ ഉള്ള രണ്ട് ഗണങ്ങൾ എടുക്കാം (ചിത്രം 16). ഗണം 'എ' ഗണം 'ബി' യേക്കാൾ വലുതാണ്. കാരണം 'എ'യിൽ ജോടി തിരിക്കാനാവാതെഒരുനാണയം അധികമുണ്ട്. അതായത് മൂന്ന് രണ്ടിനേക്കാൾ വലുതാണ്. ഗണം 'ബി', ഗണം 'എ' യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. 'ബി' യിൽ ഒരു നാണയം, വെള്ളനിറത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് കൂടി ചേർത്താൽ രണ്ട് ഗണങ്ങളും കൃത്യമായി ജോടികളാക്കാം. സംഖ്യകൾ തുല്യമായി മാറുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന ബന്ധമാണ് $2+1 = 3$. സങ്കലനത്തിന്റെ ആരംഭം ഇപ്രകാരമായിരുന്നു. രണ്ട് സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ അവയെക്കാൾ വലുതാകും ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ. വസ്തു

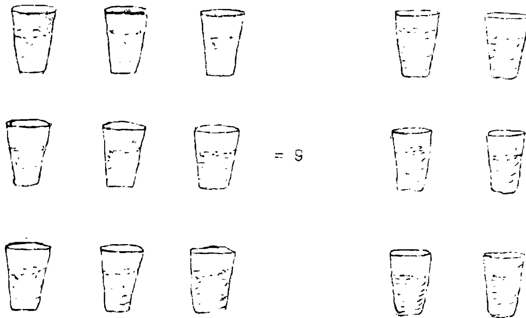


ചിത്രം 16

ക്കൾ ഏതായാലും 2+1 എന്ന സങ്കലനം 3 എന്ന തുക നൽകുന്നതായി നിരീക്ഷിക്കപ്പെട്ടു. രണ്ട് സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ എല്ലായ്പോഴും ഒരേ സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു. (2+1) നും 3 നും ഇടയ്ക്ക് ഒന്നിനൊന്ന് പൊരുത്തം നിലനിൽക്കുന്നു. സങ്കലന പ്രക്രിയയാൽ ലഭിക്കുന്ന ഗണം 1,2,3,4 .... എന്നിങ്ങനെ അവസാനിക്കാത്ത ഒരു ശ്രേണിയാണ്. ഈ ഗണത്തിലെ ഏത് രണ്ട് സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലും അതിൽ തന്നെയുള്ള മറ്റൊരു സംഖ്യ ലഭിക്കും.

'എ', 'ബി' എന്ന ഗണങ്ങൾ വീണ്ടുമെടുക്കുക. 'എ' യിൽ നിന്ന് ഒരു നാണയം എടുത്ത് മാറ്റിയാലും കൃത്യമായി ജോടി തിരിക്കാം. ഒരു ഗണത്തിലെ വസ്തു എടുത്ത് മാറ്റുന്ന ഈ ക്രിയ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 3-1=2 എന്ന വ്യവകലന പ്രക്രിയ ആണ്. വ്യവകലനം സങ്കലനത്തിന്റെ നേർ വിപരീതമാകുന്നു. മനുഷ്യൻ ആദ്യം നടപ്പാക്കിയ ഗണിതക്രിയകളാണ് സങ്കലനവും വ്യവകലനവും. ക്രമേണ കൂടുതൽ സങ്കീർണമായ ഗുണനവും ഹരണവും ഉരുത്തിരിഞ്ഞു. അവയുടെ അടിസ്ഥാനം കൂട്ടലും കിഴിക്കലും തന്നെയാണ്. കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ ആധുനികയുഗത്തിൽ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും കൂടുതൽ പ്രാമുഖ്യം കൈവരിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഗണങ്ങളാക്കി തിരിക്കൽ മനസ്സിന്റെ ഒരു നൈസർഗിക സിദ്ധിയാണ്. ഒരു കൂട്ടത്തെ മിക്കപ്പോഴും രണ്ടിന്റെയോ നാലിന്റേയോ അഞ്ചിന്റെയോ ഗണങ്ങളാക്കി നാം എണ്ണമെടുക്കുന്നു. മൂന്നിന്റെ രണ്ട് ഗണം ആറ്, മൂന്ന് ഗണം ഒമ്പത് എന്ന് കണക്കാക്കാം (ചിത്രം 17).



ചിത്രം 17

ഈ ബന്ധം ഗുണനത്തിലേക്ക് നയിക്കുന്നു. കൂട്ടങ്ങളായി കിഴിക്കുന്നത് ഹരണത്തിലേക്കും. രണ്ട് സംഖ്യകൾ ഗുണിക്കാൻ സങ്കലനം ഉപയോഗിച്ച രീതി രസകരമാണ്. ഈജിപ്തുകാർ പന്ത്രണ്ടിനെ പന്ത്രണ്ട് കൊണ്ട് ഗുണിക്കാൻ അവലംബിച്ച മാർഗം നോക്കുക.

1	12
2	24
4	48
8	96

ഈ പട്ടികയിലെ ഓരോ സംഖ്യയും തൊട്ട് മുന്നെയുള്ള സംഖ്യയെ ഇരട്ടിച്ച് കിട്ടുന്നതാണ്. $4\times12 = 48$ ഉം $8\times12 = 96$ ഉം ആയതിനാൽ $48+96$, 12×12 ആയിരിക്കും. അതായത് $12\times12 = 144$. $(4\times12) + (8\times12) = (4+8)\times12$ എന്ന സവിശേഷത അവർക്ക് അറിയാമായിരുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്. ഇതാണ് ഗുണനവിതരണ നിയമം.

തുടർച്ചയായ വ്യവകലനമാണ് ഹരണം. പന്ത്രണ്ടിനെ മൂന്ന് കൊണ്ട് ഹരിക്കണമെന്ന് കരുതുക. പന്ത്രണ്ടിൽ നിന്നും മൂന്ന്

നാല് തവണ എടുത്താൽ മതി. അപ്രകാരം 12/3 = 4. ഇനി 19 നെ 8 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നത് നോക്കാം. 19-ൽ നിന്നും 8-നെ രണ്ട് തവണ മാത്രമെ കിഴിക്കാനാകൂ. ശിഷ്ടമായ മൂന്നിനെ 8 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്ന ക്രിയ അവശേഷിക്കും. അതായത് 19/8 നെ ഇപ്രകാരം എഴുതാം.

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}, \quad i.e. \quad 2 + \frac{2}{8} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

ഹരണം ഒരു പൂർണത്തെ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണെന്ന് പറയാം.

സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കടലാസിനെ നാല് തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി കീറാവുന്നതാണ്. ഇത് ഒന്നിനെ നാല് കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിന് തുല്യമാണ്. ഓരോ ഭാഗത്തെയും 1/4 എന്ന് എഴുതുന്നു. അംശങ്ങളുടെ ആശയം ഉടലെടുത്തത് ഇപ്രകാരമാണ്. സാധാരണ സംഖ്യ, ഭിന്ന സംഖ്യ എന്നിങ്ങനെ രണ്ടിനം സംഖ്യകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യാമെന്നായി. ഭിന്നങ്ങളില്ലാത്ത എണ്ണാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന പൂർണസംഖ്യകളെയാണ് സാധാരണ സംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നത്. പൂജ്യം കണ്ടുപിടിച്ചതോടെ അത് നിലവിലുള്ള സംഖ്യകളിൽ ചേർക്കപ്പെട്ടു. മിക്ക ദൈനംദിന ക്രിയകളും നിറവേറ്റാൻ സാധാരണ സംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, പൂജ്യം, സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്ന ക്രിയകൾ മാത്രം മതി. 4 നോട് 3 കൂട്ടിയാൽ 7 ലഭിക്കും. ഇനി ആദ്യ സംഖ്യയായ 4 കിട്ടാൻ 7-ൽ നിന്ന് 3 കുറച്ചാൽ മതി. വ്യവകലനം സങ്കലനത്തിന്റെ ഫലത്തെ ഇല്ലാതാക്കുന്നു. അതായത് വ്യവകലനം സങ്കലനത്തിന്റെ വിപരീത ക്രിയയാണ്. സങ്കലനത്തിന്റെ വിപരീതക്രിയ വ്യവകലനവും. അതുപോലെ ഗുണനവും ഹരണവും അന്യോന്യം വിപരീത ക്രിയകൾ ആകുന്നു.

ഒരേ സംഖ്യയുടെ ആവർത്തിച്ച സങ്കലനം ഗുണനമാകുന്നത് പോലെ ഗുണനത്തിന്റെ ആവർത്തനം സംഖ്യയുടെ വർഗവും മൂന്നാം ഘാതവും കൂടുതൽ ഉയർന്നഘാതങ്ങളും നൽകുന്നു. വിസ്തീർണം കാണുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണ് ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം കാണൽ. തുല്യവശങ്ങളുള്ള ഒരു ചതുരസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുമ്പോൾ മൂന്നാം വർഗം ആവശ്യമാകുന്നു. വിപരീത ക്രിയകളായ വർഗമൂലം, മൂന്നാം വർഗമൂലം എന്നിവ കണക്കാക്കുന്നത് ദൈനംദിന പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്.

വ്യത്യസ്ത മണ്ഡലങ്ങളിലെ വൈവിധ്യമാർന്ന പ്രശ്ന ങ്ങൾക്ക് ഏതാനും ക്രിയകൾ കൊണ്ട് ഉത്തരം കാണാൻ സാധി ക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ്? താഴെ കൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങൾ നോക്കുക.

- ഒരു പുസ്തക വില്പനക്കാരൻ ഒന്നിന് നാല് രൂപ വെച്ച് നൂറ് പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങിയാൽ ആകെ വിലയെന്ത്?
- നൂറ് ചതുരശ്ര മീറ്റർ വീതം വിസ്തീർണമുള്ള നാല് മുറി കൾ ഉള്ള ഒരു വീടിന്റെ മൊത്തം വിസ്തീർണം എത്ര?
- നാല് മീറ്ററിൽ എത്ര സെന്റിമീറ്ററുകൾ ഉണ്ട്?
- നാല് രൂപ വീതം നൂറ് കുട്ടികളിൽ നിന്നും ഫീസ് വാങ്ങി യാൽ ആകെ പിരിച്ച ഫീസ് എത്ര? ഓരോ ചോദ്യത്തിനും ഉത്തരം 100 × 4 എന്ന് കാണാം.

എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളുടെയും പൊതുഘടനയെ 100×4 എന്ന ഗുണനത്താൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ആധുനിക സംജ്ഞയിൽ പറഞ്ഞാൽ ക്രിയകൾ പ്രതിനിധീകരണങ്ങളാണ്. അതായത് നിത്യ ജീവിതത്തിലെ വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളുടെ മോഡലുകൾ. വസ്തു ക്കൾ ഏതായാലും സംഖ്യകൾ സ്വതന്ത്രമായി നിൽക്കുന്നു. മനുഷ്യ പ്രക്രിയകളുടെ ആഴത്തിൽ കിടക്കുന്ന പാറ്റേണുകൾ സംഖ്യകളും ഗണിത ക്രിയകളും വെളിപ്പെടുത്തുന്നു. ഭൗതിക വസ് തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെടുമ്പോഴേ സംഖ്യകൾക്ക് അർഥം കൈവരികയും അവ വസ്തുതകളെ സംബന്ധിച്ച വിവരം നൽകു കയും ചെയ്യുന്നുള്ളു. ഉദാഹരണമായി രമേഷിന് കണക്കിന് നൂറിൽ അമ്പത് മാർക്ക് ലഭിച്ചെന്ന വസ്തുതയും ജയ്പൂരിലെ ഉയർന്ന താപനില അമ്പത് ഡിഗ്രി സെന്റിഗ്രേഡാണെന്നുള്ള വസ്തുതയും, 50 എന്ന സംഖ്യ നൽകുന്ന രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ആശ യങ്ങളാണ്.

സംഖ്യാവ്യവസ്ഥകളിൽ ഉണ്ടായ വികാസങ്ങൾ

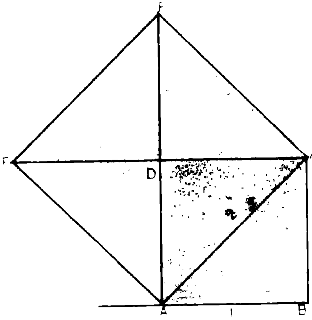
എ.ഡി. 500 ആകുമ്പോഴേക്കും അങ്കഗണിതത്തിലും ബീജഗണി തത്തിലും ത്രികോണമിതിയിലുമുള്ള വികാസത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ഇന്ത്യയായി കഴിഞ്ഞിരുന്നു. സംഖ്യാ സമ്പ്രദായം വലുതായി. പൂർണ സംഖ്യകളിലും ഛേദസംഖ്യകളിലും ഉള്ള വിവിധ ക്രിയ കൾ സ്ഥാപീകൃതമായി. 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകളും പൂജ്യവും ക്രിയാ ചിഹ്നങ്ങളും ഗണിതഭാഷയുടെ വിവിധ സംജ്ഞ കളും വിശദമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടുകഴിഞ്ഞു. കണക്ക് കൂട്ടാനുള്ള



ചിത്രം 18

വഴികൾ എന്ന നിലയ്ക്കല്ലാതെ പൊതു നിയമങ്ങളായി അവ സ്ഥാപീകൃതമായിരുന്നില്ല. എങ്കിലും ഇന്ത്യൻ ഗണിതജ്ഞർ പൊതു നിയമങ്ങളെ പറ്റി ബോധവാൻമാരായിരുന്നെന്നാണ് കരുതാവുന്നത്. ഋണ സംഖ്യകൾ, അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചും അവർ അന്വേഷണം നടത്തി. കടങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ഋണസംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി. കടം ഒരു നെഗറ്റീവ് സംഖ്യയാൽ കുറിക്കാം. പക്ഷെ ഇന്നത്തെ പോലെ സ്വതന്ത്രമായ ഉപയോഗം നിലവിൽ വന്നിരുന്നില്ല. ഐസിന്റെ താപനിലയായ പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെന്റിഗ്രേഡിനേക്കാൾ താഴ്ന്ന താപനില കുറിക്കാൻ നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ശരാശരി മഴയേക്കാൾ കുറവായ മഴ നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകളാൽ കുറിക്കാം. സ്റ്റാൻഡേർഡിനേക്കാൾ കുറവായ ഷോട്ടുകൾ ലഭിച്ച ഒരു ഗോൾഫ് കളിക്കാരന് നെഗറ്റീവ് പോയിന്റുകളാണ് ലഭിക്കുന്നത്.

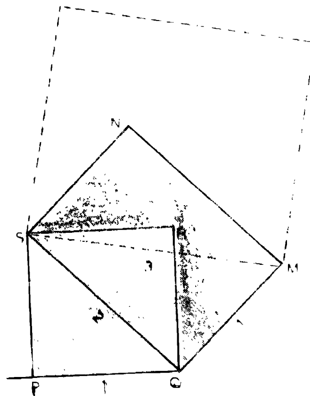
ചരിത്രപരമായി നോക്കുമ്പോൾ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ എന്നീ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ, പൗരാണിക ഗണിതകാരൻമാർക്ക് ഋണ സംഖ്യകളേക്കാൾ മുന്നെ അറിയാമായിരുന്നു. ഒരു മട്ട ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശ



ചിത്രം 19

മായുള്ള മറ്റൊരു സമചതുരം വരയ്ക്കൽ, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണത്തിന് തുല്യം വിസ്തീർണമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കൽ എന്നീ സന്ദർഭങ്ങളിൽ അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ ആവിർഭവിച്ചു. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി വിസ്തീർണമുള്ള വേറൊരു സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണം വശമായെടുത്താൽ മതി (ചിത്രം19). കാരണം സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തെ $\sqrt{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അതിൽ വികർണം ലഭിക്കും. വികർണത്തിന്റെ നീളം വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണം രണ്ട് ഇരട്ടിയാകുമല്ലോ.

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി വിസ്തീർണമുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ വികർണം നീളമായും വശം വീതിയായും ഒരു ചതുരം നിർമിക്കുക (ചിത്രം 20). ഈ



ചിത്രം 20

ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം സമചതുരത്തിന്റെ വശം $\times \sqrt{3}$ ആകും. ആ വികർണം വശമായി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന് ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തേക്കാൾ മൂന്നിരട്ടി വിസ്തീർണം ഉണ്ടാകും. ഗ്രീക്കുകാർ ജ്യാമിതി ആരംഭിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് തന്നെ ഇന്ത്യ, ചൈന, ഈജിപ്ത് എന്നിവിടങ്ങളിലെ ഗണിതകാരന്മാർക്ക് പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം അറിയാമായിരുന്നു. $\sqrt{2}$ ന്റെ കൃത്യ വില കാണാനാകില്ലെന്നും അവർ കണ്ടെത്തി. $\sqrt{3}$ മുതലായ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ വില ഏകദേശം കാണാനുള്ള മാർഗം പ്രശസ്ത ഗണിതജ്ഞൻ ഭാസ്കരാചാര്യർ രണ്ടാമൻ (A.D. 1150) തന്റെ ലീലാവതി എന്ന കൃതിയിൽ പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഇന്ന് നാം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന വിധത്തിലേക്ക് സംഖ്യകൾ വികാസം പ്രാപിക്കാൻ അയ്യായിരം വർഷങ്ങളോളം വേണ്ടി വന്നു. ആധുനിക സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ അവയെ വ്യത്യസ്ത ഗണങ്ങളായി തിരിച്ചിട്ടുണ്ട്. എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ അടങ്ങുന്ന സാധാരണ സംഖ്യകളാണ് ആദ്യത്തെ ഗണം. N എന്ന അക്ഷരത്താൽ ഈ ഗണത്തെ കുറിക്കുന്നു. അതായത് N = {1,2,3,4, ...}. N ഒരു അനന്തഗണമാകുന്നു. സാധാരണ സംഖ്യകളിൽ പൂജ്യം കൂടി ചേർത്താൽ പൂർണ സംഖ്യാഗണമായി. ഋണസംഖ്യകളെ സാധാരണ സംഖ്യകളല്ലെന്ന് കരുതി സംഖ്യാഗണത്തിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കിയിരുന്നു. ഇപ്പോൾ അവയ്ക്ക് അർഹമായ സ്ഥാനം സംഖ്യാവ്യവസ്ഥയിൽ ലഭിച്ചിട്ടുണ്ട്. സാധാരണ സംഖ്യകളും പൂജ്യവും നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകളും ചേർന്നാൽ ഇന്റിജേഴ്സിന്റെ ഗണമായി. I എന്ന അക്ഷരം ഈ ഗണത്തെ കുറിക്കുന്നു.

I = {...- 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }

പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകളും നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകളും അനന്തമാണെന്ന് കാണിക്കുന്നതിനാണ് ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്. പോസിറ്റീവും നെഗറ്റീവും ഭിന്നങ്ങൾ കൂടി ഉൾപ്പെടുത്തി ഇന്റിജറുകളുടെ ഗണം വലുതാക്കപ്പെട്ടു. (ഉദാ. 4/5, - 8/11...) ഈ ഗണത്തിലെ ഏത് രണ്ട് സംഖ്യകളെയും രണ്ട് ഇന്റിജറുകളുടെ അനുപാതമായി എഴുതാനാകും. 3 = 6/2, 7 = 21/3 എന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കുക. ഇതിനെ ഭാജ്യ സംഖ്യാഗണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. Q എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് ഭാജ്യ സംഖ്യാഗണം കുറിക്കാം.

Q = {.... -2, -3/2, -1/2, 0, 1/2,1,3/2,2....}

സംഖ്യകൾ എഴുതാനുള്ള നവീനരീതികൾ

സംഖ്യകൾ എഴുതാനുള്ള രണ്ട് പുതിയ സമ്പ്രദായങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം. ഭിന്ന സംഖ്യകൾ എഴുതാനുള്ള ദശാംശ സമ്പ്രദായം (Decimal Notation) ആദ്യം എടുക്കാം. താഴെക്കാണിച്ച സ്ഥാനവില സമ്പ്രദായം നോക്കുക.

$$\ldots 10{,}000 \quad 1{,}000 \quad 100 \quad 10 \quad 1 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1{,}000} \quad \frac{1}{10{,}000}$$

ഒന്നിന് വലത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ 1/10, 1/100 എന്നീ പ്രകാരത്തിലാണെന്ന് ശ്രദ്ധിച്ചല്ലോ. 1/10, 1/100 എന്നിവ 10^{-1}, 10^{-2} എന്ന രീതിയിലും എഴുതാം.

ദശാംശ സംഖ്യയിൽ ഏകകസ്ഥാനത്തിന് ശേഷം വരുന്ന അക്കങ്ങളെ അതാത് സ്ഥാനവില കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയാൽ ആ സംഖ്യയുടെ ഭിന്നഭാഗം ലഭിക്കുന്നു. ഏകകസ്ഥാനത്തിന് ശേഷമുള്ള ബിന്ദു ദശാംശ ബിന്ദു (Decimal Point) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ഇതിന് ശേഷമുള്ള അക്കങ്ങൾ ഭിന്നസംഖ്യാഭാഗമാണ്. 234.567 എന്ന ദശാംശഭിന്നം പരിശോധിക്കാം.

10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
2	3	4	5	6	7

അതായത് $234.567 = 2\times100+3\times10+4\times1+5\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}$

സാധാരണ ഭിന്ന സമ്പ്രദായത്തിൽ ഇതേ സംഖ്യ $234\frac{567}{1000}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ദശാംശസമ്പ്രദായം സംഖ്യകൾ എഴുതുന്ന രീതിയെ ലളിതമാക്കുന്നു. അതാത് സ്ഥാനങ്ങൾ ഒന്നിന് താഴെ ഒന്നായി എഴുതി ദശാംശസംഖ്യകൾ കൂട്ടുകയും കിഴിക്കുകയും ചെയ്യാം. പൂർണസംഖ്യകൾ ഗുണിക്കുന്നത് പോലെ തന്നെയാണ് ദശാംശ സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനം. ഗുണിക്കുന്ന രണ്ട് സംഖ്യകളിലുമുള്ള ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ കൂട്ടിയ ശേഷം ദശാംശ ബിന്ദു ഗുണന ഫലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തണം. ഹരണവും പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഹരണക്രിയക്ക് സമാനമാണ്. ഹരിക്കപ്പെടുന്ന സംഖ്യയിൽ ഏകകസ്ഥാനത്തിന് ശേഷം പൂജ്യം ചേർക്കാൻ തുടങ്ങുമ്പോൾ ഹരണഫലത്തിൽ ദശാംശബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു.

ഒരു ഭാജ്യസംഖ്യയെ അവസാനിക്കുന്നതോ ആവർത്തിക്കുന്നതോ ആയ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ ഉള്ള സംഖ്യയായി എഴുതാനാകും. രണ്ട്, അഞ്ച് ഇവയുടെ ഘാതങ്ങൾ ഛേദമായി വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ അവസാനിക്കുന്ന ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ ഉള്ളവയാണ്.

1/4 = 0.25   1/2 = 0.5 എന്നിവ ഉദാഹരണങ്ങൾ.

2/3, 2/9 എന്നീ ഭിന്നങ്ങൾ ആവർത്തന ദശാംശ സംഖ്യകളാണ്.

2/3 = 0.6666 .... 2/9 = 0.222...... എന്നിങ്ങനെ.

$\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ മുതലായ സംഖ്യകളെയും ദശാംശ സംഖ്യകളായി എഴുതാമെങ്കിലും അവയിൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുകയോ അവസാനിക്കുകയോ ചെയ്യാതെ കൂടുതൽ സ്ഥാനങ്ങളിലേക്ക് നീങ്ങും. സ്ഥാനങ്ങൾ കൂടും തോറും വിലയും കൂടുതൽ കൃത്യമാകുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യാസമ്പ്രദായം നീളം, സമയം, ബലം എന്നീ അളവുകൾ എഴുതാൻ ശാസ്ത്രകാരന്മാർ ലോകമൊട്ടുക്കും സ്വീകരിച്ച പൊതു മാനദണ്ഡമാണ്. വില അളന്ന ശേഷം ദശാംശ സ്ഥാനത്ത് പ്രസക്തമായ അക്കങ്ങൾ മാത്രമെ എഴുതുകയുള്ളു. ഒരു മില്ലി മീറ്ററിന്റെ പത്തിലൊന്ന് കണക്കാക്കി നീളം അളക്കുമ്പോൾ 27.15 സെ. മീ. എന്ന് ലഭിച്ചെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിനെ 2.715×10 എന്നെഴുതുന്നു. അതായത് ഏകകസ്ഥാനം മാത്രമെ പൂർണസംഖ്യാഭാഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നുള്ളു. ബാക്കിയുള്ള സംഖ്യകൾ ഭിന്നസ്ഥാനങ്ങളിൽ എഴുതി പത്തിന്റെ അനുയോജ്യമായ ഘാതം കൊണ്ട് ഗുണിക്കണം. ഭൂമിയുടെ വ്യാസാർധമായ 6700 കി. മീ. SI യൂണിറ്റിൽ 6.7×10^6 മീ. എന്നെഴുതുന്നു. ബ്രോമിൻ ആറ്റത്തിന്റെ ആരം $1.14 A^0$ യെ 1.14×10^{-10} m എന്നെഴുതുന്നു ($1 A^0 = 10^{-10}$ m). അതായത് രണ്ട് സംഖ്യകൾ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ ഈ സമ്പ്രദായം സഹായകരമാണ്. മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന് ഭൂമിയുടെ വ്യാസാർധം ബ്രോമിൻ ആറ്റത്തിന്റെ വ്യാസാർധത്തെക്കാൾ 10^{16} മടങ്ങ് കൂടുതലാണെന്ന് നിഷ്പ്രയാസം മനസ്സിലാക്കാം. 10^{16} വളരെ വലിയ സംഖ്യയായതിനാൽ 6.7, 1.4 എന്നീ ചെറിയ സംഖ്യകൾ അവഗണിച്ച് കണക്കാക്കുകയാണ് ചെയ്തത്. ശാസ്ത്രത്തിൽ സുപ്രധാനമായ ഈ താരതമ്യരീതിയെ ഓർഡർ ഓഫ് മാഗ്നിറ്റ്യൂഡ് എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

വിചിത്ര സംഖ്യകൾ

ആധുനിക ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമായിരിക്കെ തന്നെ കൃത്യമായി നിർവചിക്കാനാകാത്ത ചില സംഖ്യകളുണ്ട്. ഏറ്റവും പ്രശസ്തം ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ π(പൈ) ആണ്. സാധാരണ എടുക്കുന്ന 22/7, π യുടെ യഥാർഥവില അല്ല. മൂന്നിനും നാലിനും ഇടയ്ക്കാണ് πയുടെ വില എന്ന ഏകദേശ നിർധാരണം മാത്രമെ സാധ്യമാവുകയുള്ളൂ. കൂടുതൽ കൃത്യമായി പറഞ്ഞാൽ 3.1 നും 3.2 നും ഇടയ്ക്ക്. ദശാംശ സ്ഥാനത്ത് കാണിക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടും തോറും കൃത്യതയും ഏറുന്നു. കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മില്യണിൽ കൂടുതൽ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് πയുടെ വില കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ് π. വിവിധയിനം ഏകദേശവിലകൾ πയ്ക്ക് കല്പിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് ധാരാളം ചരിത്രലക്ഷ്യങ്ങൾ കാണാം. സോളമന്റെ ക്ഷേത്രമുണ്ടാക്കിയ പൗരാണിക ഹീബ്രുജനതയ്ക്ക് 3 വിശുദ്ധ സംഖ്യയായിരുന്നു. ബൈബിളിലെ രാജാക്കന്മാർ എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ദേവാലയത്തിന് പുറത്തുള്ള കുളത്തെക്കുറിച്ച് വിവരിക്കുന്ന ഭാഗം ശ്രദ്ധിക്കുക. "അവൻ 10 ക്യൂബിറ്റുകളുടെ ഒരു നിറകടൽ ഉണ്ടാക്കി....... 30 ക്യൂബിറ്റുകളുടെ ഒരു രേഖയായിരുന്നു അതിന് പരിധി." ബാബിലോണിയക്കാർ π യുടെ വില 3 1/8 ഉം ഈജിപ്തുകാർ 3 12/81 ഉം എന്ന് കണക്കാക്കി. ചൈനാക്കാർ π, 3.16 ന് സമമായി കണക്കാക്കി. തു ചുങ്ങിന്റെ 'ചി'യിൽ ഏഴ് സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി 3.1415926 നും 3.1415927 നും ഇടയ്ക്ക് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. പണ്ടുകാലത്ത് πയെ ഒരു അനുപാതം എന്ന നിലക്കയ്ല്ലാതെ ഒരു പ്രത്യേക സംഖ്യ എന്ന് പരിഗണിച്ചിരുന്നില്ല. πയുടെ വില കാണാൻ മറ്റ് മാർഗങ്ങളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. πയുടെ പ്രത്യേകത ആദ്യം മനസ്സിലാക്കിയത് ആർക്കിമെഡീസ് ആയിരുന്നു. 3 10/71 നും 3 1/7 നും ഇടയ്ക്കാണ് π യുടെ വില എന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. ഏകദേശവില 3 1/7 അഥവാ 22/7 എന്ന് നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു. ആർക്കിമെഡീസ് πയ്ക്ക് പ്രത്യേക പ്രതീകം നല്കിയിരുന്നില്ല. 1706-ൽ വില്യം ജോൺസ് ആണ് ഈ അനുപാതത്തിന് πഎന്ന പ്രതീകം നല്കിയത്. 1964-ൽ ബ്രിട്ടീഷ് ടി. വി. സ്ക്രീനിലെ രേഖകൾ 625 ആക്കിയപ്പോൾ പൈ ടെലിവിഷൻ കമ്പനിയിലെ

ഒരു എഞ്ചിനീയർ രസകരമായ അനുപാതം സൂചിപ്പിച്ചു. π= 1964/625. 1949 മുതൽ ഗണിതകാരൻമാർ πയുടെ കൂടുതൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ കണ്ടെത്താനുള്ള കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമുകൾ വികസിപ്പിച്ചു കൊണ്ടിരുന്നു. 1984-ൽ ജപ്പാനിലെ ഒരു കമ്പ്യൂട്ടർ 2 മില്യൺ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ πയുടെ വില കണക്കാക്കി. പ്രായോഗിക കാരണങ്ങളാൽ തന്നെ സംഖ്യകൾ പ്രാധാന്യം കൈവരിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും തനതായ ആകർഷകത്വവും അവയിൽ ഉണ്ട്. സംഖ്യകൾ, അവയുടെ സ്വഭാവം എന്നിവ പഠനവിധേയമാക്കുന്ന ഗണിത ശാഖയാണ് സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം (Number Theory)അഥവാ ഉയർന്ന അങ്കഗണിതം (Higher Arithmatic).

വൃത്തത്തെ സംബന്ധിക്കുന്നതും ത്രികോണമിതിയിൽ ഉള്ളതും ആയ ബന്ധങ്ങൾ π അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ്. കോണുകൾ റേഡിയൻ (Radian) എന്ന യൂണിറ്റിൽ അളക്കാം. 2π റേഡിയൻ എന്നാൽ 360 ഡിഗ്രി ആയി. ത്രികോണമിതിയിലെ ബന്ധങ്ങൾ πയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. വൃത്ത പരിധി കാണാൻ π അവശ്യമായതിനാൽ അത് ആധുനിക സാങ്കേതിക വിദ്യക്കും അടിസ്ഥാനമാകുന്നു. ഇലക്ട്രിക്കൽ എഞ്ചിനീയറിങ്ങ്, തരംഗ പ്രസരണം, ജ്യോതിശാസ്ത്ര ക്രിയകൾ ഇവയ്ക്കും ആധാരം ത്രികോണമിതി തന്നെ. ആധുനിക ശാസ്ത്രത്തിൽ π അത്രയേറെ പ്രമുഖമാണെന്ന് അർഥം.

മറ്റൊരു വിചിത്ര സംഖ്യയായ e യും ആധുനിക ഗണിതത്തിലെ അടിസ്ഥാനങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. ത്രികോണമിതി ബന്ധങ്ങൾ, ഹൈപർബോളിക് ഫങ്ഷനുകൾ, എക്സ്പോണൻഷ്യൽ ഫങ്ഷനുകൾ ഇവയെല്ലാം e യെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ്.

ഒരു അനന്തശ്രേണിയുടെ ആകെത്തുകയാണ്

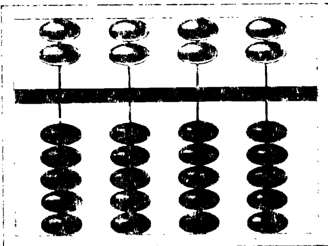
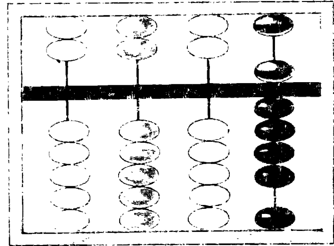
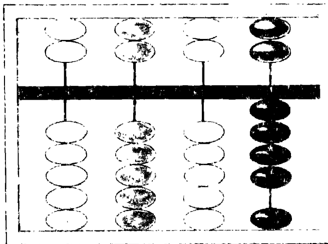
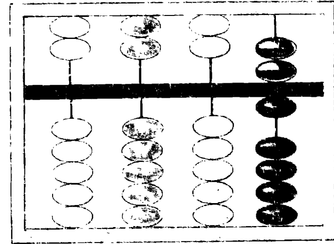
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

ഈ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും 3 ന് താഴെയായിരിക്കും. π, e എന്നിവ അഭാജ്യ സംഖ്യകളാണ്.

i എന്ന വിചിത്ര സംഖ്യ ഒരു സാങ്കല്പിക സംഖ്യയാകുന്നു. i ഒരു ഋണസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് $\sqrt{-1}$ ധനസംഖ്യയായാലും ഋണസംഖ്യയായാലും എല്ലാ

സംഖ്യകൾക്കും ഒരു പൊതുഗുണമുണ്ട്. അവയുടെ വർഗം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും. അതായത് വർഗം ഋണസംഖ്യയായ ഒരു യഥാർഥ സംഖ്യ ഉണ്ടാവുക അസാധ്യമാണ്. പക്ഷെ വർഗമൂലം കാണുമ്പോൾ ഇത്തരം വിചിത്ര സംഖ്യകൾ പണ്ടുതൊട്ടെ ഗണിതകാരന്മാർ നിരീക്ഷിച്ചിരുന്നു. അവയ്ക്ക് സാങ്കല്പിക സംഖ്യകൾ എന്ന് നാമകരണം ചെയ്തത് ദെക്കാർത്തെ ആണ്.

$a+b\sqrt{-1}$ അതായത് $a+bi$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ സങ്കീർണ സംഖ്യകൾ (Complex numbers) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അവ ഗണിതത്തിലും ശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള ഒട്ടേറെ ഫങ്ഷനുകൾക്ക് ആധാരമാണ്. നവീന ഗണിതത്തിൽ സങ്കീർണ സംഖ്യകൾ ധാരാളമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നു.

ചിത്രം 21

സംഖ്യകൾ എണ്ണാനുള്ള രീതികൾ

എണ്ണമെടുക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ സാംസ്കാരിക വളർച്ചയ്ക്കൊപ്പം തന്നെ പുരോഗമിച്ചു. നാവിക ഗവേഷണത്തിലെ വളർച്ച ലോഗരിഥം പട്ടികയുടെയും ത്രികോണമിതി പട്ടികയുടെയും കണ്ടുപിടിത്തത്തിന് വഴി തെളിച്ചത് ഉദാഹരണമായി പറയാം. സ്ലൈഡ് റൂൾ തയ്യാറായതോടെ സാങ്കേതിക വിദ്യ വികാസം പ്രാപിച്ചു. ആധുനികയുഗത്തെ നാം കമ്പ്യൂട്ടറുകളുടെ കാലമായി അറിയുന്നു.

എണ്ണാൻ സ്ഥിരമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെട്ട ആദ്യത്തെ ഉപകരണമാണ് അബാക്കസ് (ചിത്രം 21). ഒരു ചട്ടത്തിൽ കുത്തനെ ദണ്ഡുകൾ ഉറപ്പിക്കുന്നു. തിരശ്ചീനമായ മറ്റൊരു ബാർ ചട്ടത്തെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുന്നു. കുത്തനെയുള്ള ബാറുകളിൽ മുകൾഭാഗത്ത് രണ്ട് മണികളും താഴെ അഞ്ച് മണികൾ വീതവും ഉണ്ടാകും. മുകളിലുള്ളവ അഞ്ചിനെയും താഴെയുള്ളവ ഏകകങ്ങളെയും കുറിക്കുന്നു. വലിയ സംഖ്യകൾ കൂട്ടാനും കുറയ്ക്കാനും ഇവ ഉപയോഗിക്കാം.

അബാക്കസിന്റെ ഉദ്ഭവത്തെക്കുറിച്ച് അറിയില്ലെങ്കിലും മൂവായിരം വർഷങ്ങളായി ഇത് ചൈനയിൽ ഉപയോഗത്തിലുണ്ട്. ചൈന, ജപ്പാൻ എന്നിവിടങ്ങളിൽ ഇപ്പോഴും അബാക്കസ് കൊണ്ട് എണ്ണുന്ന രീതി വ്യാപകമാണ്.

ഗുണനം

ഒരു സംഖ്യയെ ആവർത്തിച്ച് കൂട്ടുന്നത് തന്നെയാണ് ഗുണനം. രണ്ടിന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ പട്ടിക നോക്കുക.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

അതായത് 2×10 വരെ. ഉയർന്ന ഗുണിതങ്ങളും കാണാവുന്നതാണ്. പക്ഷെ 2 ×10 ൽ കൂടുതൽ പോകേണ്ട ആവശ്യമില്ല. കാരണം 2×16 ചെയ്യാൻ 10 വരെയുള്ള പട്ടിക മതി. 2×16 = 16×2= (10+6) ×2 = 20+12 -32. ചിത്രം 22 ൽ കാണിച്ച പട്ടികകൊണ്ട് സാധാരണ ആവശ്യം വരുന്ന എല്ലാ ഗുണനവും ഹരണവും ചെയ്യാം.

ഇന്ത്യയിൽ ഗുണനപ്പട്ടികകൾ വളരെയേറെ വികാസം പ്രാപിച്ചിരുന്നു. 30 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ആദ്യത്തെ 10 ഗുണിതങ്ങൾ, ആദ്യത്തെ 100 ഗുണിതങ്ങൾക്കുള്ള ഭിന്നങ്ങൾ എന്നിവയ്ക്കുള്ള പട്ടികകൾ രണ്ടായിരം വർഷത്തിലേറെ കാലം വ്യാപകമായി നിലവിൽ ഉണ്ടായിരുന്നു.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ചിത്രം 22

ഗുണനപ്പട്ടികകൾ തന്നെ ഹരണത്തിനും ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി 3 × 4 = 12 എന്ന ഗുണനത്തിൽ നിന്ന് 12/4=3 എന്ന ഹരണം സാധ്യമാണല്ലോ. ഘാതങ്ങളും വർഗമൂലങ്ങളും ഒഴിച്ചുള്ള സങ്കീർണമായ കണക്കാക്കലുകൾക്ക് ശക്തമായ ഉപാധികളാണ് ഗുണനപ്പട്ടികകൾ.

ലോഗരിഥം

ബ്രിട്ടൺ, ഡെൻമാർക്ക്, സ്പെയിൻ, പോർച്ചുഗൽ എന്നീ രാഷ്ട്രങ്ങൾ 15-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ വൻതോതിൽ സമുദ്രസഞ്ചാരങ്ങൾ ആരംഭിച്ചു. സമുദ്രയാനത്തിന് നക്ഷത്രങ്ങൾ, ഗ്രഹങ്ങൾ, നക്ഷത്ര സമൂഹങ്ങൾ എന്നിവയുടെ കൃത്യസ്ഥാനം നിർണയിക്കണം. കൃത്യത കൂടിയ ത്രികോണമിതി പട്ടികകൾ നിർമിക്കേണ്ടിവന്നു. സങ്കീർണമായ ഗണനങ്ങൾ ലളിതമാക്കാൻ ലോഗരിഥം കണ്ടുപിടിക്കപ്പെട്ടു.

ഗുണനത്തെ സങ്കലനത്തിലേക്കും ഹരണത്തെ വ്യവകലനത്തിലേക്കും വ്യാവർത്തനം ചെയ്യാനുള്ള ആയുധമാണ് ലോഗരിഥം. അക്കാരണത്താൽ ഗണനം ഒട്ടേറെ ലളിതമാകുന്നു.

കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ

ഗണനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ഏറ്റവും കാര്യശേഷിയുള്ള യന്ത്രം കമ്പ്യൂട്ടറാണ്. കൂറ്റൻ സംഖ്യകളെ, അതിവേഗം, കൃത്യതയോടെ കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ കമ്പ്യൂട്ടറിന് കഴിയുന്നു. ഗണനത്തിലെ യുക്തിപരമായ ക്രിയകൾ നിറവേറ്റാൻ വേണ്ട ഇലക്ട്രോണിക് സർക്യൂട്ടുകളാണ് കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ ഹൃദയഭാഗം. വാക്കുകളുടെ ഭാഷ കൊണ്ടല്ല, അക്കങ്ങളുടെ ഭാഷ കൊണ്ടാണ് കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. കമ്പ്യൂട്ടർ ഭാഷയിലെ എല്ലാ വാക്കുകളും രണ്ട് അക്കങ്ങൾ മാത്രം അടങ്ങിയതാണ്. ഒന്നും പൂജ്യവും. ദ്വയാംശ സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ 1,0 എന്നീ അക്കങ്ങൾ മാത്രമുള്ളതിനാൽ എല്ലാ സംഖ്യകളെയും രണ്ടിന്റെ ഘാതങ്ങളായി എഴുതണം. സ്ഥാന വിലകൾ താഴെ കാണിച്ച പ്രകാരമാണ്.

$$2^8 \quad 2^7 \quad 2^6 \quad 2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$$

ദശാംശ സമ്പ്രദായത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ബൈനറി സംഖ്യകളാക്കി മാറ്റാം.

1	=	1	
2	=	10	
3	=	11	
4	=	100	
5	=	101	
6	=	110	
7	=	111	
8	=	1,000	
9	=	1,001	
10	=	1,010	എന്നത് ഉദാഹരണം.

കമ്പ്യൂട്ടർ സർക്യൂട്ടിൽ 1 ഒരു അടഞ്ഞ (Closed) സർക്യൂട്ടും 0 ഒരു തുറന്ന (Open) സർക്യൂട്ടും ആണ്. പ്രോഗ്രാമിലൂടെ കമ്പ്യൂട്ടറിന് ഒരു കോഡ് നല്കുന്നു. ഈ കോഡ് സാധാരണ ഭാഷയെ കമ്പ്യൂട്ടർ ഭാഷയിലേക്കും തിരിച്ചും വിവർത്തനം ചെയ്യും. ഗണിതത്തിൽ ഗുണനത്തെ സങ്കലനമായും ഹരണത്തെ വ്യവകലനമായും കമ്പ്യൂട്ടർ പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നു.

പ്രാകൃതരീതിയിലേക്കുള്ള മടങ്ങിപ്പോക്കായി തോന്നാമെങ്കിലും കൂട്ടലും കിഴിക്കലും കമ്പ്യൂട്ടർ അതിവേഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ ഈ മാറ്റം പ്രസക്തമല്ല. ഏത് തരം സങ്കീർണ പ്രശ്നങ്ങളും കൈകാര്യം ചെയ്യാനാകുന്ന മുന്തിയ പ്രോഗ്രാമുകൾ ഇക്കാലത്ത് ലഭ്യമാണ്. നൂറ് കണക്കിന് സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കൽ, ചിത്രരചന, അച്ചടി, റിസർവേഷൻ, ബാങ്കിങ്ങ് എന്ന് തുടങ്ങിയ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പ്രോഗ്രാമുകൾ ഉണ്ട്. ആധുനിക ജീവിതത്തിൽ ഒഴിച്ചുകൂടാനാകാത്ത ഉപാധിയായി കമ്പ്യൂട്ടർ മാറിക്കഴിഞ്ഞു. നാം ജീവിക്കുന്നത് പൂർണതയുടെയും (ഒന്ന്) ശൂന്യതയുടെയും (പൂജ്യം) ലോകത്താണെന്ന് പറയാം!

3

ചരങ്ങൾ

ഗണിതം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നദൈനംദിന പ്രശ്നങ്ങൾ സ്വാഭാവവൈജാത്യമുള്ളവയാണ്.

അജ്ഞാതമോ സദാ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതോ ആയ ഒട്ടേറെ അളവുകളിലൂടെ നാം ദിനംതോറും കടന്നു പോകുന്നു. ബസ്സിൽ യാത്ര ചെയ്യുമ്പോൾ അതിന്റെ വേഗത വ്യത്യാസപ്പെട്ടു കൊണ്ടിരിക്കുന്നത് ഉദാഹരണം. കണ്ടക്ടറുടെ ബാഗിലുള്ള പണത്തിന്റെ അളവും മാറുന്നു. ജീവിതം നിറയെ മാറ്റത്തിന് വിധേയമാകുന്ന അളവുകളാണ്. ഒരാളുടെ മാസച്ചിലവ്, കച്ചവടത്തിലെ ലാഭം, കാർഷികവിള, മഴ, വായുവിന്റെ ചൂട്, ചെടിയുടെ ഉയരം, ദിവസത്തിന്റെ നീളം എന്നിങ്ങനെ.

അജ്ഞാതമോ ചരങ്ങളോ ആയ രാശികൾ കുറിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യം ആദ്യം മനസ്സിലാക്കിയത് ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞരാണ്. അവർ അതിന് വ്യത്യസ്ത സംജ്ഞ നല്കി. ക്രി. മു. 300 ലും പഴക്കമുള്ള ഒരു രേഖയിൽ യാവദ്-താവദ് (അത്രത്തോളം, അത്രയെണ്ണം) എന്ന പദം പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതായി കാണുന്നു. പിന്നീടുള്ളവർ അറിയപ്പെടാത്തത് എന്ന് അർഥം വരുന്ന അവ്യക്ത എന്ന പ്രയോഗം ഉപയോഗിച്ചു (വ്യക്തം എന്നതിന്റെ വിപരീതമായി).

ചരങ്ങൾക്ക് ചിഹ്നങ്ങൾ ഇല്ലായിരുന്നെങ്കിലും ബാബിലോണിയക്കാർ അത്തരം പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിച്ചു. അമ്മട്ടിലുള്ള സംഖ്യകൾക്ക് പകരം അവർ വാക്കുകൾ ഉപയോഗിച്ചു. അതിനാൽ ബീജഗണിതം പ്രഭാഷണാത്മകമായ ബീജഗണിതം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ക്രി. മു. 1600- ഓളം പഴക്കമുള്ള പാപ്പിറസ് എന്ന ഈജിപ്ഷ്യൻ രേഖകളിൽ ഒട്ടേറെ ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങൾ കൂട്ടം എന്ന് അർഥം വരുന്ന 'ഹോ' എന്ന പേരിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

നവീന ഭാഷയിൽ ബീജഗണിതം എന്ന് ചരങ്ങളുടെ ഗണിതം അറിയപ്പെടുന്നു. പ്രതിഭാധനന്മാരായ ആര്യഭടൻ ഒന്നാമൻ, ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ഭാസ്കരാചാര്യൻ രണ്ടാമൻ എന്നീ ഇന്ത്യൻ ഗണിതകാരന്മാർ പല ബീജഗണിതരീതികളും മെച്ചപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

എ.ഡി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഡയോഫന്റസ് എന്ന് ഗ്രീക്ക് ഗണിതജ്ഞന്റെ കാലത്തോളം ഈ മേഖലയിൽ ചെറിയ പുരോഗതിയേ കൈവരിച്ചിരുന്നുള്ളു. അദ്ദേഹം ഗണിത പ്രശ്നങ്ങളെ സമവാക്യങ്ങളിലേക്ക് ചുരുക്കി. അജ്ഞാത സംഖ്യയെ Σ (സിഗ്മ) എന്ന അക്ഷരത്താൽ പ്രതിനിധീകരിച്ചു. ഡയോഫന്റസ് വാക്കുകളുടെ ആദ്യാക്ഷരങ്ങൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് അനാവശ്യമായ പദങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി ഒരു ചുരുക്കെഴുത്ത് വികസിപ്പിച്ചു. 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഫ്രാങ്കോയിസ് വിറ്റ എന്ന ഫ്രഞ്ച് ഗണിതകാരൻ a, e, i, o, u എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ അജ്ഞാത സംഖ്യകൾക്ക് പകരമായി ഉപയോഗിച്ചു. b,c,d,f,g എന്നിവ ഗണിതപ്രശ്നത്തിൽ വില മാറാ തെ നില്ക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾക്ക് പകരംവെച്ചു. 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ മഹാനായ തത്വശാസ്ത്രജ്ഞൻ റെനെ ദെക്കാർത്തെ അക്ഷരമാല യിൽ ആദ്യം വരുന്ന a,b,c എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ സ്ഥിരമൂല്യങ്ങൾ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന സംവിധാനം ആവിഷ്കരിച്ചു. സംഖ്യാ ശാസ്ത്രത്തിലെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ പൊതുതത്വവത്കരിക്കു ന്നതിലും അപ്രകാരം ഗണിത പുരോഗതിയിൽ പങ്കുവഹി ക്കുന്നതിലും അതീവ പ്രധാനമായ ആശയമായിരുന്നു അജ്ഞാത ങ്ങളെയും ചരങ്ങളെയും അക്ഷരങ്ങളാൽ കുറിക്കൽ.

എ.ഡി. 9-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന മുഹമ്മദ് ബിൻ മിസാ അൽ ക്വാരിസ്മി എന്ന പേഴ്സ്യക്കാരന്റെ ഒരുഗ്രന്ഥത്തിന്റെ പേരിൽ നിന്നാണ് ആൽ-ജിബ്ര എന്ന പദത്തിന്റെ ഉദ്ഭവം. പുനർസ്ഥാപനം, ലളിതമാക്കൽ എന്നീ അർഥങ്ങൾ വരുന്ന ആൽ-ജിബർ-വാ-ആൽ-മുഖാബലാ എന്നൊരു കൃതി അദ്ദേഹം അറബി ഭാഷയിൽ എഴുതി. ആൽ-ജിബർ എന്നാൽ ഒരു സമവാക്യത്തിലെ നെഗറ്റീവ് ആയ ഭാഗങ്ങൾ മറുപുറത്തേക്ക് മാറ്റി പോസിറ്റീവ് ആക്കുന്ന രീതിയാണ്. അറബികൾക്കൊപ്പം സ്പെയിനിലേക്ക് ഈ വാക്കുമെത്തി. കാലക്രമത്തിൽ ആൽ-ജിബർ ആൽജിബ്ര എന്നായി. ഇന്ന് ബീജഗണിതത്തിലെ ഒരു ക്രിയയ്ക്ക് പകരമല്ല അനേകം ക്രിയകൾക്ക് പകരമായി ഈ പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഗണിതത്തിലെ പാറ്റേണുകൾ (ഗണിത ഘടനകൾ)

ഒരു പാറ്റേണിനെ പൊതുരൂപത്തിലേക്ക് കൊണ്ടുവരൽ എന്നത് സുപ്രധാനമായ ഒരു ഗണിതക്രിയയാണ്. സങ്കലനം എടുക്കുക.

$$3 + 4 = 7 = 4 + 3$$
$$5 + 10 = 15 = 10 + 5$$
$$6 + 7 = 13 = 7 + 6$$

മധ്യഭാഗത്തെ സംഖ്യകൾ ഒഴിവാക്കി താഴെ കാണും പ്രകാരം എഴുതാം.

$$3 + 4 = 4 + 3$$
$$5 + 10 = 10 + 5$$
$$6 + 7 = 7 + 6$$

അക്കങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് മാറ്റി വെച്ചാൽ $a+b=b+a$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഈ ലളിത ബീജഗണിതസമവാക്യം ഇത്തരത്തിലുള്ള എല്ലാ സമവാക്യങ്ങളെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. സങ്കലനത്തിന്റെ സവിശേഷ ഗുണത്തിലേക്കാണ് ഈ സമവാക്യം വിരൽ ചൂണ്ടുന്നത്. അതായത് സംഖ്യകളുടെ ക്രമം മാറിയാലും സങ്കലനത്തിന്റെ ഫലം ഒന്നായിരിക്കും. ഇതാണ് സങ്കലന ക്രമനിയമം സങ്കലനത്തിലും ഗുണനത്തിലും സാധാരണയായി പ്രയോജന പ്പെടുന്ന സവിശേഷതകൾ താഴെയുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ കാണിക്കുന്നു. a,b,c എന്നിവ ഏത് സംഖ്യയുമാകാം.

$a+b = b+c$	സങ്കലനക്രമ നിയമം
$(a+b) + c= a+(b+c)$	സങ്കലന സംയോജകതാ നിയമം
$a\times b = b \times a$	ഗുണന ക്രമ നിയമം
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	ഗുണന സംയോജകതാ നിയമം
$a \times (b+c) = a\times b + a\times c$	സങ്കലനത്തോട് ബന്ധപ്പെട്ട ഗുണന വിതരണ നിയമം

പൂജ്യത്തിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തവും അതിന്റെ സവിശേഷതകളും ഗണിതത്തിൽ അതിപ്രധാനമായിരുന്നെന്ന് മുമ്പ് സൂചിപ്പിച്ചല്ലോ. ആര്യഭടൻ മുതലായവർ പൂജ്യത്തിന്റെ വിചിത്ര ഗുണങ്ങൾ പഠനവിധേയമാക്കി. അന്നത്തെ സമ്പ്രദായമനുസരിച്ച് പദ്യരൂപത്തിലാണ് അവർ ഈ സവിശേഷതകൾ എഴുതി വച്ചത്. അവയുടെ ആധുനികരൂപം നോക്കാം.

$a + 0 = 0 + a = a$

$a \times 0 = 0 \times a = 0$

$a - 0 = a$

$a \div 0$ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഹരണം അവർക്ക് വ്യക്തമായി പഠിക്കാൻ സാധിച്ചില്ല.

മേൽ കാണിച്ച ക്രിയാനിയമങ്ങളുടെ പ്രയോജനം സാധാരണ ജീവിതത്തിൽ എപ്രകാരമെന്ന് പരിശോധിക്കാം. പണമിടപാടുകളുടെ കണക്ക് സൂക്ഷിക്കൽ സുപ്രധാനമാണല്ലോ. 50,100,45,40 ഇത്രയും രൂപകൾ കൂട്ടണമെന്നിരിക്കട്ടെ, രണ്ട് സംഖ്യകൾ വീതം കൂട്ടലാണ് എല്ലായ്പ്പോഴും ചെയ്യുന്നത്.

$$\begin{aligned} 50+100+45+40 &= (50 + 100) + 45 + 40 \\ &= (150 + 45) + 40 \\ &= 195 + 40 \\ &= 235 \end{aligned}$$

വേറൊരു രീതിയിലും ഇതേ സങ്കലനം ചെയ്യാം.

$$\begin{aligned} 50+100+45+40 &= 50 + 100 + (45 + 40) \\ &= 50 + (100 + 85) \\ &= 50 + 185 \\ &= 235 \end{aligned}$$

അതായത് ഏത് ക്രമത്തിലും സംഖ്യകൾ കൂട്ടാവുന്നതാണ്. ക്രമനിയമവും സംയോജകതാ നിയമവും സ്വതന്ത്രമായി പ്രയോഗിക്കുകയാണ് ഇവിടെ ചെയ്തത്. ഗുണനവും ഇപ്രകാരം തന്നെ 5×17 എന്നത് സാധാരണ 17×5 എന്നാണ് ഗണിക്കുന്നത്. ഗുണനപ്പട്ടിക നോക്കാനുള്ള എളുപ്പമാണ് കാരണം.

$12 \times 5 \times 2$ എന്ന ഗുണനം പരിശോധിക്കാം.

$$\begin{aligned} 12 \times 5 \times 2 &- (12 \times 5) \times 2 \\ &= 60 \times 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ

$$= 12 \times (5 \times 2) = 12 \times 10 = 120$$

വിഷമം പിടിച്ച ഗുണനങ്ങൾക്ക് ക്രമനിയമം സഹായകര

മാകുന്നു. 137 × (5 × 2) = 137 × 10 എന്ന രീതി (137 × 5) × 2 എന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പമാണല്ലോ a (b + c) = a × b + a × c എന്ന വിതരണ നിയമം വലിയ സംഖ്യകൾ ഗുണിക്കാൻ സഹായകരമാണ്.

$$256 \times 7 = (200 + 50 + 6) \times 7$$
$$= 1400 + 350 + 42$$
$$= 1,792$$

പത്തിന്റെയും നൂറിന്റെയും സ്ഥാനത്തുള്ള അക്കങ്ങളെ ഓരോന്നായി ഗുണിക്കുന്നതാണ് സാധാരണ രീതി. ഈ നിയമങ്ങളും നിത്യജീവിതവുമായുള്ള ഗാഢബന്ധം വ്യക്തമായിരിക്കുമല്ലോ.

സമാന ബന്ധം

ബീജഗണിതവാക്യത്തിൽ അക്ഷരങ്ങൾക്ക് പകരം അക്കങ്ങൾ നല്കിയാൽ ആ വാക്യത്തിന്റെ ഒരു വില ലഭിക്കുന്നു. രണ്ട് വാക്യങ്ങൾക്ക് ഒരേ വില ലഭിക്കുകയാണെങ്കിൽ അവ സമാനമാണെന്ന് പറയാം. ഈ സമാനത ഒരു സമവാക്യമായി എഴുതാം. a (b + c); a × b + a × c എന്നിവ രണ്ട് സമാന വാക്യങ്ങളാണ്.

a = 2 b = 3 c = 4 എന്ന വിലകൾ നല്കുക.

$$a \times (b + c) = 2 \times (3 + 4)$$
$$= 2 \times 7$$
$$= 14$$

$$a \times b + a \times c = 2 \times 3 + 2 \times 4$$
$$= 6 + 8$$
$$= 14$$

ഈ വാക്യങ്ങളെ a × (b + c) = a × b + a × c എന്ന സമവാക്യമായി എഴുതാം.

നിത്യജീവിതത്തിലും ഗണിതത്തിലും ശാസ്ത്രത്തിലും വലിയൊരു ഭാഗമായി വിവിധയിനം സമവാക്യങ്ങളുണ്ട്. ഒരു ഉദാഹരണം കൊടുക്കുന്നു.

ഒരു ഫുട്ബാൾ ക്ലബിൽ മൂന്ന് പേർ പുതുതായി ചേർന്നു. ഒരു മാസത്തിന് ശേഷം മൊത്തം അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും പകുതി പേർ വിട്ടുപോയി. രണ്ട് മാസത്തിനുള്ളിൽ വീണ്ടും പത്ത് പേർ ചേർന്നപ്പോൾ അംഗസംഖ്യ ആദ്യത്തെ അംഗസംഖ്യക്ക്

തുല്യമായെങ്കിൽ തുടക്കത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നു?

ആദ്യത്തെ അംഗസംഖ്യ x എന്ന് കരുതുക. 3 പേർ ചേർന്നപ്പോൾ (x+3) അംഗങ്ങളായി. പകുതി പേർ വിട്ടുപോയാൽ അവശേഷിക്കുന്നത് (x+3)/2. വീണ്ടും പത്ത് പേർ ചേർന്നാൽ [(x + 3)/2] + 10 അംഗങ്ങൾ. ഇത് ആദ്യത്തെ അംഗസംഖ്യ xന് തുല്യവുമാണ്. അതായത്,

$$\frac{x+3}{2}+10=x$$

$$2\left[\frac{x+3}{2}+10\right]=2x$$

$$\therefore x+3+20=2x$$

$$\therefore x+23=2x$$

$$\therefore x+23-x=2x-x$$

$$23=x$$

അതായത് ആദ്യത്തെ അംഗസംഖ്യ 23.

സമവാക്യ സമൂഹം

ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ ലീലാവതിയിൽ ഒരു ശ്ലോകം ഇപ്രകാരമാണ്. "അല്ലയോ ശിഷ്യേ, തുക നൂറ്റൊന്ന്, വ്യത്യാസം ഇരുപത്തഞ്ച് ആയ രണ്ട് സംഖ്യകൾ ഏതെന്ന് കാണാനുള്ള മാർഗം അറിയുമെങ്കിൽ പറഞ്ഞാലും." ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാൽ ഈ പ്രശ്നത്തിന് ഉത്തരം കാണുന്നത് എങ്ങനെ? സംഖ്യകൾ x ഉം y ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ

$$x+y=101$$

$$x-y=25$$

$$(x+y)+(x-y)=101+25$$

$$2x=126$$

$$x=63$$

$$x+y=101$$

$$63+y=101$$

$$y=101-63=38$$

ആയതുകൊണ്ട് തുക 101 ഉം വ്യത്യാസം 25 ഉം ആയ സംഖ്യകൾ 63, 38 എന്നിവയാകുന്നു.

ശ്രേണികൾ

'എ', 'ബി' എന്ന രണ്ട് സുഹൃത്തുക്കൾ കുശലം പറയുകയായിരുന്നു. അപ്പോൾ 'എ' , 'ബി' ക്ക് ഒരു വാഗ്ദാനം നൽകി. എല്ലാ ദിവസവും ആയിരം രൂപ വെച്ച് ഞാൻ നിനക്ക് ഒരു മാസത്തേക്ക് പണം തരാം. ഒന്നാം ദിവസം ആയിരം രൂപ, രണ്ടാം ദിവസം രണ്ടായിരം രൂപ, മൂന്നാം ദിവസം മൂവായിരം രൂപ എന്ന പ്രകാരം. പകരം നീ ആദ്യത്തെ ദിവസം ഒരു പൈസ രണ്ടാം ദിവസം അതിന്റെ ഇരട്ടി പൈസ എന്ന തോതിൽ ഒരു മാസത്തിനുള്ളിൽ വീട്ടിയാൽ മതി. സുഹൃത്ത് സസന്തോഷം സമ്മതിച്ചു. പിന്നീട് അയാൾക്ക് പശ്ചാത്തപിക്കേണ്ടി വന്നു. കാരണമെന്താണ്?

ഓരോരുത്തർക്കും ലഭിക്കുന്ന പണത്തിന്റെ പട്ടിക പരിശോധിക്കുക.

ദിവസം	A (രൂപ)	B (രൂപ)
1	1000	.01
2	2000	.02
3	3000	.04
4	4000	.08
5	5000	.16
6	6000	.32
7	7000	.64
8	8000	1.28
9	9000	2.56
10	10,000	5.12
11	11,000	10.24
12	12,000	20.48
13	13,000	40.96
14	14,000	81.92
15	15,000	163.84
16	16,000	327.68
17	17,000	655.36
18	18,000	1,310.72
19	19,000	2,621.44
20	20,000	5,242.88

21	21,000	10,485.76
22	22,000	20,971.52
23	23,000	41,943.04
24	24,000	83,886.08

A പശ്ചാത്തപിക്കാനുള്ള കാരണം മനസ്സിലായില്ലേ 23-ാം ദിവസമാകുമ്പോഴേക്കും B യിൽ നിന്നും ലഭിച്ച തുക ഏകദേശം ഇരട്ടിയോളം അയാൾക്ക് നൽകേണ്ടി വരുന്നു. ഒരു പൈസയിൽ നിന്നും നിന്നും ആരംഭിച്ച് B യ്ക്ക് A യെക്കാൾ പണം ലഭിച്ചതെ പ്രകാരമാണ്?

സംഖ്യകൾ പെരുകിയ ക്രമം നമുക്ക് നോക്കാം.

	1-ാം ദിവസം	2-ാം ദിവസം	3-ാം ദിവസം	4-ാം ദിവസം
A	1000	2000	3000	4000
	1000	1000+1000	2000+1000	3000+1000..
B	0.01	0.02	0.04	0.08..
	1	0.01 × 2	0.02 × 2	0.04 × 2

ഓരോ ശ്രേണിയിലെയും സംഖ്യകൾ വർധിക്കുന്നത് പ്രത്യേക രീതികളിലാണ്. ആദ്യശ്രേണിയിൽ ഓരോ സംഖ്യയും തൊട്ട് മുന്നിലുള്ള സംഖ്യയെക്കാൾ 1000 കൂടുതലാണ്. രണ്ടാമത്തേതിൽ ഓരോ സംഖ്യയും തൊട്ട് മുന്നിലുള്ള സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയും. സങ്കലനശ്രേണി സാവകാശം വലുതാകുമ്പോൾ ഗുണനത്തിന്റെ ശ്രേണി വളരെ പെട്ടെന്ന് ഭീമമാകും. ആദ്യത്തെ ശ്രേണി അരിത്മെറ്റിക്സ്വീക്വൻസ് എന്നും രണ്ടാമത്തെത് ജ്യോമെട്രിക് സ്വീക്വൻസ് എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. ഇവയുടെ പഠനം ബീജഗണിതത്തിലെ ഒരു പ്രധാന വിഷയമാകുന്നു.

സീരിസ് : ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഘടകങ്ങൾ സങ്കലനം ചെയ്യൽ

ഒരിക്കൽ ഒരു പ്രാഥമിക വിദ്യാലയത്തിലെ അധ്യാപകൻ കുട്ടികളോട് 1 മുതൽ 100 വരെ ഉള്ള എല്ലാ സംഖ്യകളും കൂട്ടാൻ പറഞ്ഞു. കുറച്ച് നേരം വിശ്രമിക്കാമല്ലോ എന്നായിരുന്നു അയാളുടെ ഉദ്ദേശ്യം. പക്ഷെ അധ്യാപകനെ അദ്ഭുതപ്പെടുത്തി കൊണ്ട് ചോദ്യം പറഞ്ഞു തീരുമ്പോഴേക്കും ഒരു കുട്ടി സ്ലേറ്റിൽ ഉത്തരം എഴുതിക്കഴിഞ്ഞു. അധ്യാപകൻ ഉത്തരം കാണിക്കാൻ പറഞ്ഞപ്പോൾ 5050 എന്ന ശരിയുത്തരം തന്നെ ആയിരുന്നു അവന് ലഭിച്ചിരുന്നത്. പില്ക്കാലത്ത് മഹാനായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായി മാറിയ ഫ്രെഡറിക് ഗോസ് ആയിരുന്നു ആ കുട്ടി.

ഓരോ സംഖ്യകളായി എഴുതി കൂട്ടുകയല്ല ഗോസ് ചെയ്തത്. ആകെ തുക (1+100) + (2+99) + (3+98)........ എന്നിങ്ങനെയുള്ള 50 ജോടി 101കളുടെ തുകയാണ്. അതിനാൽ ഉത്തരം 50×101= 5050 ആകുന്നു.

യഥാർഥത്തിൽ ഇത് അരിത്മെറ്റിക് പ്രോഗ്രഷനിലുള്ള ഒരു ശ്രേണിയുടെ തുക കാണാനുള്ള രീതിയാണ്. ആദ്യത്തെ പദം a, n പദങ്ങൾ, d പൊതുവ്യത്യാസവും ഉള്ള ഒരു അരിത്മെറ്റിക് പ്രോഗ്രഷന്റെ തുക

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$$

എന്ന സൂത്രവാക്യം കൊണ്ട് കണക്കാക്കാം.

$a = 1$ $d = 1$ $n = 100$ ആയാൽ

$$S_{100} = \frac{100}{2}\,[2+99] = 50\times 101 = 5{,}050$$

സംഖ്യകളുടെ ഈ പാറ്റേൺ ആണ് ഗോസിന്റെ പ്രതിഭ ഒറ്റഞൊടിയിൽ ദർശിച്ചത്.

a ആദ്യപദവും r പൊതു അനുപാതവും n പദങ്ങളും ഉള്ള ഒരു ജ്യോമെട്രിക് പ്രോഗ്രഷന്റെ തുക കാണാനുള്ള സൂത്രവാക്യം നോക്കാം.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

നേരത്തെ പരാമർശിച്ച ഒരു ഉദാഹരത്തിൽ A, B എന്നീ സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് മാസാവസാനം ലഭിച്ച തുക നമുക്ക് ഇപ്രകാരം കാണാം.

A യ്ക്ക് ലഭിച്ച തുക

$$S_n = \frac{30}{2}\left[2\times 1{,}000 + (30-1)1{,}000\right]$$

$= 15[2{,}000+29{,}000]$

$= 15 \times 31{,}000$

$= 4{,}65{,}000$ രൂപ

B യ്ക്ക് ലഭിച്ച തുക

$$S_n = \frac{1(2^{30}-1)}{2-1}$$

$= 2^{30}-1$

$= 1{,}07{,}37{,}41{,}823$ പൈസ $= 1{,}07{,}37{,}418.23$ രൂപ

ഗണിതം യഥാർഥ ജീവിതത്തിൽ

ജീവിതത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം വീഴുന്ന ഒരു കണ്ണാടിയാണ് ഗണിതം എന്ന് പറയാം. യഥാർഥപ്രശ്നം അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന ഗണിതജ്ഞന് അദ്ഭുതലോകത്തിലെ ആലീസിനെ പോലെ ജീവിതത്തിന്റെ ഗണിതപ്രതിച്ഛായയിൽ അലഞ്ഞ്, ഭാവന കൊണ്ട് പ്രതിബിംബത്തിൽ കാണുന്ന പ്രശ്നം പരിഹരിച്ച് ശരിയുത്തരവുമായി ജീവിതത്തിലേക്ക് മടങ്ങിവരാൻ സാധിക്കും. ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

> ഒരു ഹോസ്റ്റലിലെ അംഗസംഖ്യ 12-ൽ നിന്നും 16 ആയപ്പോൾ മൊത്തം ചെലവ് 7000 രൂപയിൽ നിന്നും 9000 രൂപ പ്രതിമാസം വർധിച്ചതായി കണ്ടു. മാസവാടക ഒരു നിശ്ചിതതുകയും മാസചെലവ് വേറെ സംഖ്യയുമായാൽ ഓരോ വിദ്യാർഥിയുടെയും വാടകയും ചെലവും കണക്കാക്കണം.

ഈ പ്രശ്നത്തെ ഗണിതത്തിലേക്ക് മാറ്റാൻ ഓരോ അളവുകളും അക്ഷരത്താൽ സൂചിപ്പിക്കാം. M=വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം, A=മാസ ചെലവ് R വാടക(മൊത്തം) E ഒരു മാസത്തെ ആകെ ച്ചെലവ്

$$E = M \times A + R$$

Mനും Eക്കും വിലകൾ നല്കിയാൽ

$$7000 = 12A + R \ldots \quad (1)$$
$$9000 = 16A + R \ldots \quad (2)$$

രണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ ഒന്നിച്ച് പരിഹരിക്കേണ്ട ഗണിത പ്രശ്നമാണിത്. (2) -ൽ നിന്നും (1) കുറച്ചാൽ

$$2000 = 4A$$
$$A = 500$$

A യുടെ വില 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ നല്കുക.

$$7000 = 12 \times 500 + R$$
$$= 6000 + R$$
$$R = 1000$$

ഗണിതത്തെ സംബന്ധിക്കുന്ന ഭാഗം കഴിഞ്ഞു. യഥാർഥ ജീവിതത്തിൽ ഇതിന്റെ വ്യാഖ്യാനമെന്ത്? ഓരോ വിദ്യാർഥിയുടെയും മാസചിലവ് 500 രൂപയാണെന്നും വാടക 1000 രൂപയാണെന്നും അർഥം.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ വസ്തുതകളെ അക്ഷരങ്ങളാൽ പ്രതിനിധാനം ചെയ്ത് E = M×A+R എന്ന സമവാക്യം ഉണ്ടാക്കിയത് ശ്രദ്ധിച്ചിരിക്കുമല്ലോ. ഇത് പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതമാതൃകയാണ്. 'മാത്തമെറ്റിക്കൽ മോഡലിങ്ങ്' യഥാർഥ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണാനുള്ള ശക്തമായ ഉപാധിയാകുന്നു. കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരേ ഗണിത മാതൃകയുടെ പല രീതികളും ചരങ്ങളും മൂല്യം മാറ്റി പരിശോധിച്ചും ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ മോഡൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം. മീറ്റിയോറോളജി ആണവശാസ്ത്രം, ഏറോനോട്ടിക്സ്, ഹൈഡ്രോഡൈനാമിക്സ്, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, സോഷ്യോളജി, വാർത്താ വിനിമയം എന്നിവയിൽ എല്ലാം അതിസങ്കീർണമായ പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ഗണിത മാതൃകകൾ സഹായിക്കുന്നു.

4

അനുപാതങ്ങൾ: വസ്തുക്കളുടെ താരതമ്യം

ഒരു സാധനം വാങ്ങുമ്പോഴോ, രണ്ട് പ്രവൃത്തികളിൽ ഒന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോഴോ നാം താരതമ്യം ചെയ്യാറുണ്ട്. കൽക്കട്ട, ബോംബെയേക്കാൾ വലുതാണ്; സുഭാഷ് , സതീഷിനേക്കാൾ ശക്തനാണ്; കല്പന, കവിതയെക്കാൾ കണക്കിൽ ഭേദമാണ് എന്നീ താരതമ്യങ്ങൾ നാം സദാ നടത്തുന്നു. പക്ഷെ, ഇവ അവ്യക്തങ്ങളായ താരതമ്യങ്ങളാണ്. കൃത്യമായി എത്രമാത്രം വലുത്, എത്രയധികം ശക്തം എന്നൊന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാനാകില്ല, അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ വസ്തുതകൾ കൃത്യമായി താരതമ്യം ചെയ്യാം. ഗണിത നിയമങ്ങൾക്ക് അനുസൃതമായി സംഖ്യകൾ താരതമ്യം നടത്തി ശരിയായ തീരുമാനങ്ങളിൽ എത്താം. ബോംബെയിലും കൽക്കട്ടയിലും ജനസംഖ്യ യഥാക്രമം 8 മില്യണും 10 മില്യണും ആണെന്ന് അറിഞ്ഞാൽ കൽക്കട്ട ബോംബെയെക്കാൾ വലിയ നഗരമാണെന്ന് പറയാനാവും. വസ്തുതകളോട് ബന്ധപ്പെട്ട സംഖ്യകളെയാണ് നാം താരതമ്യം നടത്തുന്നത്. അതായത് പ്രശ്നം രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ താരതമ്യത്തിലേക്ക് ചുരുങ്ങുന്നു.

സംഖ്യകൾ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ രണ്ട് വഴികളുണ്ട്, a,b എന്നീ രണ്ട് സംഖ്യകൾ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ a-b എന്ന വ്യത്യാസം കണ്ടാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി 14 - 10 = 4 ആയതിനാൽ 14, 10നെക്കാൾ വലിയ സംഖ്യയാണെന്ന് ലഭിക്കും. മറ്റൊരു മാർഗം ഒരു സംഖ്യയെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കലാണ്. 20, 10 എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുക. 20/10 = 2/1 അതായത് 20, 10 ന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. 10/20 = 1/2 എന്നതിനാൽ 10, 20 ന്റെ പകുതിയാണെന്ന് പറയാം. താരതമ്യത്തിന് നിലവിലുള്ള ലളിത മാർഗം സംഖ്യകളുടെ അനുപാതം കാണലാകുന്നു. 50, 100 ന്റെ

പകുതിയാണെന്ന് പറയുന്നത് 50, 100 നെക്കാൾ 50 കുറവാണെന്ന് പറയുന്നതിനെക്കാൾ എളുപ്പമാണല്ലോ.

അനുപാതങ്ങൾ കാണിക്കാൻ വിവിധ മാർഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു കമ്പനിയുടെ കാര്യക്ഷമതയെക്കുറിച്ചുള്ള റിപ്പോർട്ടിൽ 'ഈ വർഷം ലാഭം ഇരട്ടിച്ചു' എന്ന് പ്രസ്താവിക്കുന്നത് ഉദാഹരണം. ഈ വർഷത്തെ ലാഭവും കഴിഞ്ഞ വർഷത്തെ ലാഭവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം 2/1 ആണെന്ന് അർഥം. ബോണസ് ഷെയറുകൾ വിതരണം ചെയ്യുമ്പോൾ 1:2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിതരണം ചെയ്യും എന്ന് പറയുമ്പോൾ അർഥമാക്കുന്നത് എന്താണ്? രണ്ട് ഷെയറുകൾക്ക് ഒരു ബോണസ് ഷെയർ എന്ന തോതിൽ വിതരണം നടക്കുമെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ സാക്ഷരതാനിരക്ക് മൂന്ന് സാക്ഷരർക്ക് ഒരു നിരക്ഷരൻ എന്നാണെങ്കിൽ നിരക്ഷരരും സാക്ഷരരും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം 1/3 എന്ന് പറയാം. അനുപാതങ്ങൾ കാണിക്കാൻ പല രീതികളുണ്ട്, 1/3 എന്ന അനുപാതത്തെ 1:3 എന്നും എഴുതാം. 2÷3 എന്ന അനുപാതം 2/3, 2:3 എന്നീ രൂപങ്ങളിൽ കാണിക്കാവുന്നതാണ്.

അനുപാതം a/b എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ ഭാജ്യസംഖ്യയായി കണക്കാക്കാം. a,b എന്നിവ പൂർണ സംഖ്യകളായിരിക്കണം. പൂജ്യം ആകാൻ പാടുള്ളതല്ല. ഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ നിയമങ്ങൾ അനുപാതങ്ങൾക്കും ബാധകമാണ്. 2/3, 7/8 എന്നീ അനുപാതങ്ങളിൽ വലുത് ഏതെന്ന് തീരുമാനിക്കാൻ അവയെ ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കുള്ള ക്രിയകൾക്ക് വിധേയമാക്കിയാൽ മതി. 2/3 = 16/24 ഉം 7/8 = 21/24 ഉം ആയതിനാൽ 7/8 വലിയ അനുപാതമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

അളവുകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ മാത്രമല്ലാതെ യൂണിറ്റുകൾ കൂടിയുണ്ടെങ്കിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ അക്കാര്യം കൂടി ശ്രദ്ധിക്കണം. 3 മണിക്കൂറോ, 150 മിനിറ്റോ ഏതാണ് വലുത്? അളവുകൾ വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകളിലാണ്. ഒരേ യൂണിറ്റിലേക്ക് മാറ്റിയ ശേഷമെ താരതമ്യം സാധ്യമാകൂ. 3 മണിക്കൂർ 180 മിനിറ്റുകളാണല്ലോ. 180 മിനിറ്റും 150 മിനിറ്റും താരതമ്യം ചെയ്താൽ 3 മണിക്കൂർ കൂടുതലാണ്.150 മിനിറ്റുകൾ 2.5 മണിക്കൂറായതിനാൽ 2.5 മണിക്കൂറും 3 മണിക്കൂറും താരതമ്യം ചെയ്താൽ മതി.

ശതമാനം

സാധാരണ അനുപാതങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാനും താരതമ്യം നടത്താനും പല രീതികൾ ഉണ്ട്. ഒരു വിദ്യാർഥിക്ക് ഭാഷയിൽ 100-ൽ 75 മാർക്കും സയൻസിന് 150 -ൽ 120 മാർക്കും കിട്ടിയാൽ ഏത് വിഷയത്തിലെ ഫലമാണ് മെച്ചപ്പെട്ടത്? ഇവിടെ 75/100, 120/150 എന്നീ അനുപാതങ്ങളുടെ താരതമ്യമാണ് ആവശ്യം. 75/100 = 225/300; 120/150 = 240/300; 225/300, 240/300 എന്നീ ഭിന്നങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്ത് സയൻസിലെ മാർക്ക് മെച്ചപ്പെട്ടതാണെന്ന് കണ്ടെത്താം. 300- നെ പൊതു ഛേദമായി എടുക്കുകയാണ് ചെയ്തത്. ഏത് സംഖ്യയേയും പൊതു ഛേദമാക്കാവുന്നതാണ്.

100 പൊതു ഛേദമായെടുത്ത് അനുപാതം ശതമാനത്തിൽ കാണിക്കുന്നത് ഒരു സാധാരണ രീതിയാകുന്നു. 100 ൽ 75 മാർക്ക് 75 ശതമാനമായി പറയുന്നു. പെർസെന്റ് എന്നതിന് അർഥം, ഓരോ നൂറിനും എന്നാണ്. 120/150 = 80/100 ആയതിനാൽ 80 ശതമാനം എന്ന് കാണാം. പരീക്ഷാ ഫലങ്ങൾ, നിരക്ഷരരുടെയും സാക്ഷരരുടെയും എണ്ണം മുതലായവ അളവുകൾ ശതമാനത്തിൽ കാണിക്കാറുണ്ട്.

അനുപാതം

താഴെ കൊടുത്ത പ്രയോഗങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. കൂടുതൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ കൂടുതൽ സന്തോഷം, കൂടുതൽ ലഭിക്കുമ്പോൾ കൂടുതൽ ആവശ്യം. ജലത്തിലേക്ക് കൂടുതൽ താഴുമ്പോൾ കൂടുതൽ മർദം, കൂടുതൽ ഉയരത്തിൽ ചെന്നാൽ കൂടുതൽ തണുപ്പ്. ഇവയെല്ലാം രണ്ട് വസ്തുതക്കൾക്ക് ഇടയിലെ ബന്ധം കാണിക്കുന്നു. ഒരു വസ്തുത മാറുമ്പോൾ മറ്റൊന്ന് ആദ്യത്തേതിന് അനുസൃതമായോ വിപരീതമായോ മാറുന്നു. വെള്ളത്തിൽ ആഴം കൂടും തോറും മർദവും കൂടുന്നു. ആഴം, മർദം എന്നീ അളവുകൾ ഒരുമിച്ച് കൂടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യും. എന്നാൽ സമുദ്രനിരപ്പിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം കൂടുംതോറും അന്തരീക്ഷ താപനില കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അവയ്ക്ക് വിപരീതബന്ധമാണ് ഉള്ളത്.

ഒരേ പോലെ മാറുന്ന വസ്തുതകൾ പരിശോധിക്കാം. ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ പതിപ്പുകളും വിലയും എടുക്കുക.

പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം	*വില*
10	200
20	400
50	1000

എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ വിലയും കൂടുന്നു. 10/200 = 20/400 = 500/1000 =1/2. അതായത് സമാന അളവുകളുടെ അനുപാതം തുല്യമായിരിക്കും. രണ്ട് ഭിന്നങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ ബന്ധപ്പെട്ട നാല് അളവുകളും അനുപാതത്തിലാണ്. a/b = c/d എന്നാൽ a,b,c,d എന്നിവ ക്രമാനുപാതത്തിലാണ്. a,b,c,d എന്നിവ അനുപാതത്തിൽ ആണെങ്കിലും a,d,b,c എന്നിവ അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കില്ല. a,b,c,d എന്നിവ ക്രമത്തിൽ അനുപാതത്തിലാണെന്ന് അറിയാമെങ്കിൽ a/b = c/d എന്ന് എഴുതാം. ഇവയിൽ മൂന്ന് സംഖ്യകൾ അറിയാമെങ്കിൽ നാലാമത്തേത് നിഷ്പ്രയാസം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഒരു ഉദാഹരണം കാണിക്കാം.

ഒരാൾ 75 രൂപക്ക് മൂന്ന് പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങിയെങ്കിൽ 300 രൂപയ്ക്ക് അയാൾക്ക് എത്ര പുസ്തകങ്ങൾ കിട്ടും?

X പുസ്തകങ്ങൾ ലഭിക്കുമെന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ,

$$\frac{3}{75} = \frac{x}{300}$$

$$x = \frac{3}{75} \times 300 = 12$$

അതായത് 300 രൂപ കൊടുത്താൽ അയാൾക്ക് 12 പതിപ്പുകൾ കിട്ടും.

ഒരു മണിക്കൂറിൽ 50 കി. മീറ്റർ വേഗതയിൽ ഓടുന്ന കാർ ഓരോ മണിക്കൂറിലും സഞ്ചരിച്ച ദൂരമാണ് താഴെ കാണിച്ച പട്ടികയിൽ .

സമയം (മണിക്കൂർ)	*ദൂരം (കി. മീറ്റർ)*
1	50
2	100
3	150
4	200

പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണവും വിലയും, കാർ സഞ്ചരിച്ച സമയവും ദൂരവും എന്നീ അളവുകൾ ഒരേ രീതിയിൽ മാറുന്നു

എന്ന് ശ്രദ്ധിച്ചല്ലോ. അവ ക്രമാനുപാതത്തിൽ ആണെന്ന് പറയും. ചിലപ്പോൾ അളവുകൾ വിപരീതമായി മാറും. അതായത് ഒരളവ് വർധിക്കുമ്പോൾ രണ്ടാമത്തേത് കുറയുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ അളവ് കുറയുമ്പോൾ രണ്ടാമത്തേത് കൂടുന്നു. ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

> കടമെടുത്ത 1000 രൂപ മാസതവണകളായി തിരിച്ചടയ്ക്കണം. എത്ര മാസത്തിനുള്ളിൽ അടച്ച് തീർക്കാമെന്നത് അടയ്ക്കുന്ന സംഖ്യയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുമല്ലോ. ഒരുപട്ടിക നിർമിക്കാം.

രൂപ	*മാസങ്ങൾ*
100	10
200	5
250	4
500	2

മാസത്തവണയുടെ തുക കൂടുമ്പോൾ അടച്ച് തീർക്കാനുള്ള സമയം കുറയുന്നു. തുകയും സമയവും വിപരീതഅനുപാതത്തിലാണ്.

$\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$; $\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}$ ഉം $\frac{2}{1}$ ഉം വിപരീതങ്ങളാണല്ലോ.

അതേപോലെ $\frac{200}{500}=\frac{2}{5}$; $\frac{5}{2}$ ആണ് ഇതിന്റെ വിപരീതം.

ഈ പ്രശ്നത്തിൽ 100, 200, 10, 5 എന്നീ സംഖ്യകൾ വിപരീത അനുപാതത്തിലാണ് എന്നു പറയുന്നു.

തുടർച്ചയുള്ള അനുപാതം

മൂന്ന് സംഖ്യകൾക്ക് ഇടയ്ക്കുള്ള അനുപാതം പഠിക്കാം. നടുവിലുള്ള സംഖ്യ ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുമായി അനുപാതത്തിലായിരിക്കും.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$ac = b^2$$

അഥവാ $b=\sqrt{ac}$

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണന ഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ. രണ്ട് സംഖ്യ കളുടെ ജ്യോമെട്രിക് മാധ്യം ആണ് b. ശാസ്ത്രത്തിന്റെയും ഗണി തത്തിന്റെയും വിവിധ ശാഖകളിൽ ഉപയോഗമുള്ള ഒരു പ്രധാന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ മാധ്യമാണ് ജ്യോമെട്രിക് മീൻ. മൂന്നിൽ കൂടുതൽ സംഖ്യകൾക്കും ഇത് ബാധകമാണ്. അത്തരം അനുപാതം തുടർച്ചയായ അനുപാതമാകുന്നു.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e} \ldots\ldots$$

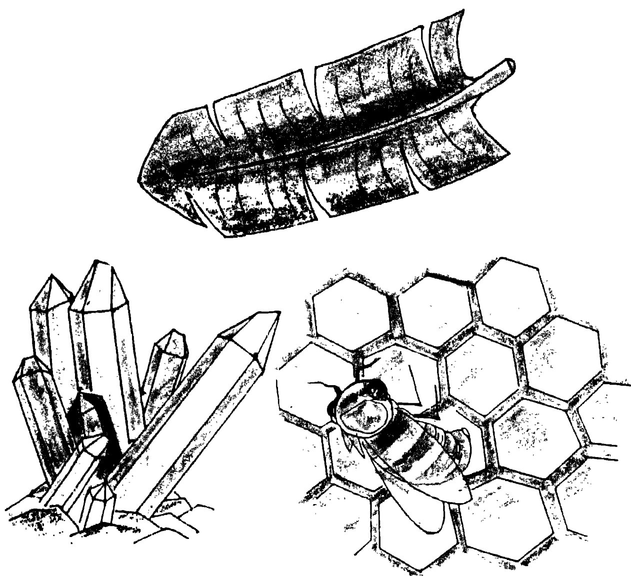
എന്നാൽ a, b, c, d, e എന്നിവ തുടർച്ചയായ അനുപാത ത്തിൽ ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

5

ആകൃതികൾ; വലിപ്പങ്ങൾ

രാധാനാഥ് സിക്ദർ സർവെ ഓഫ് ഇന്ത്യയുടെ ഓഫീസിലെ ഒരു ജീവനക്കാരനായിരുന്നു. ഡാർജിലിങ്ങിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന കാലത്ത് ദൂരെ കാണപ്പെടുന്ന കൊടുമുടികളിൽ ഏറ്റവും വലുതായി തോന്നിച്ചതിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കാൻ അയാൾ തീരുമാനിച്ചു. PK-15 എന്നായിരുന്നു ആ കൊടുമുടിക്ക് പേരിട്ടിരുന്നത്. താൻ നിൽക്കുന്ന ഉയരം രാധാനാഥ് കണക്കാക്കി. ആ സ്ഥലത്ത് നിന്നും അളവുകൾ എടുത്ത് അയാൾ കൊടുമുടിയുടെ ഉയരം കണക്കാക്കി നോക്കി. സ്വന്തം കണ്ണുകളെ അയാൾക്ക് വിശ്വസിക്കാനായില്ല. അയാൾക്ക് കിട്ടിയ ഉത്തരം അമ്പരപ്പിക്കുന്നതായിരുന്നു. കൊടുമുടിയുടെ ഉയരം സമുദ്രനിരപ്പിൽ നിന്നും 29,002 അടി (8700.6 m) ആയിരുന്നു. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ ആ കൊടുമുടിക്ക് പിന്നീട് മൗണ്ട് എവറസ്റ്റ് എന്ന പേർ ലഭിച്ചു. പർവതാരോഹണം നടത്താതെ തന്നെ രാധാനാഥ് ഉയരം കണ്ടുപിടിച്ചതെങ്ങനെ? ഇന്ദ്രജാലമല്ല ജ്യാമിതിയിലുള്ള അറിവാണ് അയാളെ സഹായിച്ചത്. ഇമ്മട്ടിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ ജ്യോമെട്രി സഹായിക്കുന്നത് എപ്രകാരമാണ് എന്ന് നോക്കാം.

ജ്യോമെട്രി എന്ന വാക്കിന് 'ഭൂമിയെ അളക്കൽ' എന്നാണ് അർഥം (Geo- ഭൂമി; Metry- അളക്കൽ). പ്രകൃതിയിലെ വിവിധ ആകൃതികളുടെ പഠനത്തിൽ നിന്നാണ് ജ്യാമിതി ഉടലെടുത്തത്. പ്രകൃതിയിലെ ചില സുന്ദരങ്ങളായ മാതൃകകൾ ചിത്രം 23 - ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിനും പ്രത്യേക ജ്യാമിതീയാകാരമുണ്ട്. വാഴയിലയിലെ കോണുകളും സമാന്തരരേഖകളും; തേനീച്ചക്കൂടിലെ ഷഡ്ഭുജങ്ങൾ; ക്വാർട്ട്സ് പരലിലെ ആറ് വശമുള്ള സ്തംഭങ്ങൾ എന്നിവ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഈ രൂപങ്ങളിൽ ഭാഗങ്ങളുടെ പ്രത്യേക ക്രമീകരണം കാണാം. ഇതിനെ 'പാറ്റേൺ' എന്ന് വിളിക്കുന്നു. പാറ്റേണുകൾ മനസ്സിലാക്കാനും ഓർത്തു വെക്കാനും

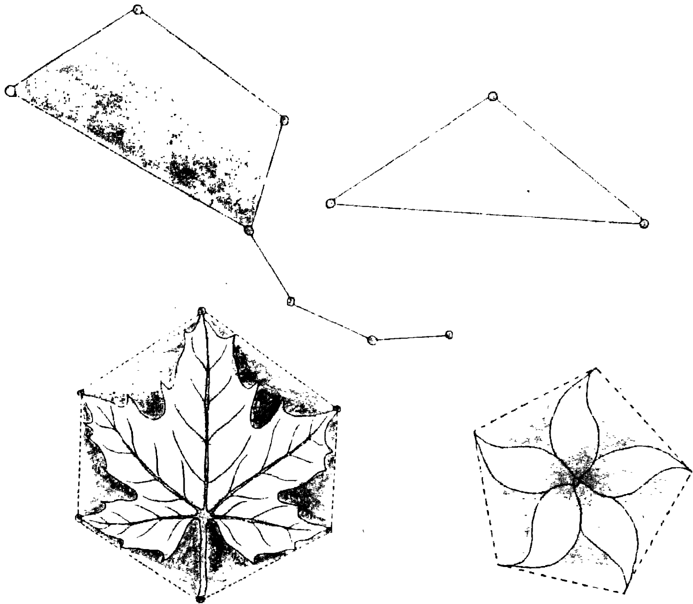


ചിത്രം 23

ഓരോന്നും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അറിയാനും മറ്റ് സ്ഥലങ്ങളിൽ കണ്ടാൽ തിരിച്ചറിയാനും നമുക്ക് സാധിക്കുന്നു.

മനുഷ്യനും പ്രകൃതിയും തമ്മിലുള്ള പ്രതിപ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്ന് ജ്യാമിതി ആവിർഭവിച്ചു. ആകാശത്തിലെ നക്ഷത്രങ്ങൾ ബിന്ദു എന്ന ആശയത്തിന് ജന്മം നല്കി. മരച്ചില്ലകളും ഒരു ക്രമീകരണത്തിലെ നക്ഷത്ര ചിഹ്നങ്ങളും കോൺ എന്ന ആശയത്തിന് കാരണമായി. ഇലകൾക്ക് ഇടയിലൂടെ വന്ന് പൊടിയിലും പുകയിലും തെളിയുന്ന സൂര്യപ്രകാശം നേർരേഖയ്ക്ക് ജന്മം നൽകി. ഇലകളുടെ ആകൃതിയിൽ നിന്ന് വക്രങ്ങൾ എന്ന ആശയം ഉണ്ടായി.

ഇല, ദളങ്ങൾ എന്നിവയുടെ പാറ്റേണുകൾ നിരീക്ഷിച്ച് ജ്യാമിതിയിലെ അടിസ്ഥാന ആകൃതികളായ ബിന്ദു, രേഖ, കോൺ, വൃത്തം എന്നിവ ജന്മമെടുത്തു (ചിത്രം 24). ബാക്കി വരുന്ന ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, ഷഡ്ഭുജം എന്നിവയെല്ലാം ഈ അടിസ്ഥാന മാതൃകളിൽ നിന്നാണ് ഉണ്ടായത്. ത്രികോൺ,



ചിത്രം 24

ചതുഷ്കോൺ, പഞ്ചകോൺ എന്നീ വാക്കുകളും ഈ വസ്തുതകൾ സമർഥിക്കുന്നു.

ജ്യാമിതി ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ

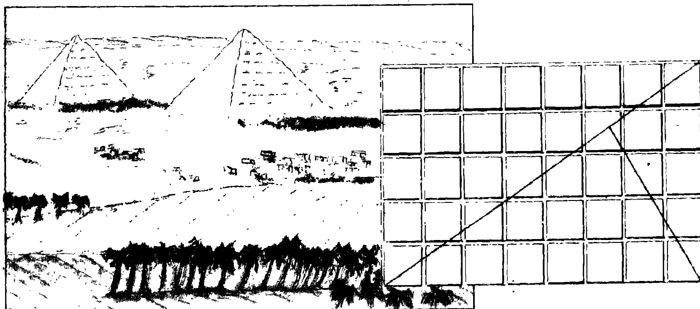
ജ്യാമിതിയുടെ ജനനം പ്രാഗ് ചരിത്രത്തിലാണ്. ഒരു പ്രദേശത്തെ ജനസംഖ്യ വർധിച്ചതോടെ പ്രകൃതിദത്തമായ വാസസ്ഥലങ്ങൾ തികയാതെ വന്നു. വെയിലും മഴയും കൊടുങ്കാറ്റും ചെറുക്കുന്ന, കുടുംബാംഗങ്ങളെ മുഴുവൻ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വീടുകൾ പണിയേണ്ടതായി വന്നു. അനുയോജ്യമായ വീടുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ നീളങ്ങൾ അളക്കണം; കൂട്ടത്തിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ഉയരമുള്ള ആളേക്കാൾ ഉയരം കണക്കാക്കണം എന്നെല്ലാമായി.

പൗരാണിക ബാബിലോണിയക്കാരാണ് ഈ ശാഖയ്ക്ക് തുടക്കം കുറിച്ചത്. യൂഫ്രട്ടീസിനും ടൈഗ്രീസിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ചതുപ്പ് നിലത്താണ് അവർ വസിച്ചിരുന്നത്. വെള്ളം നീക്കാനും പുഴയിലെ വെള്ളപ്പൊക്കം നിയന്ത്രിക്കാനും അവർ കനാലുകൾ

ഉണ്ടാക്കി.അതിനായി ഭൂമി അളക്കേണ്ടി വന്നു. ഈ പ്രക്രിയക്കിടയിൽ വിസ്തീർണങ്ങൾ കാണാനുള്ള നിയമങ്ങൾ വികസിപ്പിക്കപ്പെട്ടു. നിയമങ്ങൾ പൂർണമായും ശരിയായിരുന്നില്ലെങ്കിലും തോടുകൾ നിർമിക്കാൻ അവ ധാരാളമായിരുന്നു.

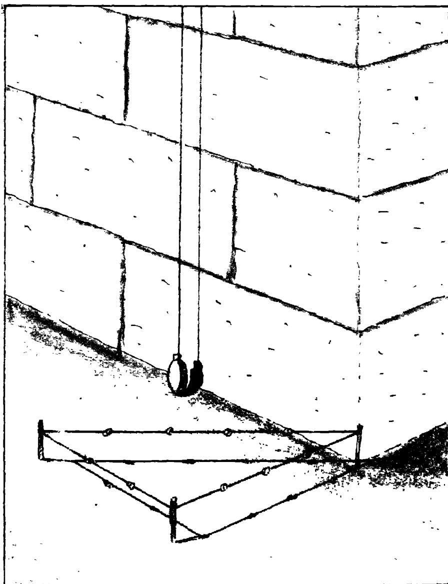
ഈജിപ്തിലെ നൈൽ നദീതടത്തിലെ കൃഷിയിടങ്ങൾക്ക് വലിപ്പം അനുസരിച്ച് നികുതി ഏർപ്പെടുത്തിയിരുന്നു. മഴക്കാലത്ത് നദി കവിഞ്ഞൊഴുകി സ്ഥലം മുങ്ങുമ്പോൾ അതിർത്തിരേഖകൾ മാഞ്ഞ് പോകും. അർഹമായ തോതിൽ എല്ലാവർക്കും ഭൂമി ലഭിക്കാൻ അളവുകൾ ആവശ്യമായി വന്നു (ചിത്രം 25). വെള്ളപ്പൊക്കം അവസാനിക്കുമ്പോൾ പരിശീലനം നേടിയവർ പുതിയ അതിർരേഖകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. കൃത്യമായ അകലങ്ങളിൽ കെട്ടിട്ട കയറുകൾ കൊണ്ടാണ് അവർ ഭൂമി അളന്നത്. സ്ഥലത്തെ ത്രികോണങ്ങൾ, ചതുരങ്ങൾ, ലംബകങ്ങൾ എന്നീ ആകൃതികളിൽ ഭാഗിക്കാൻ അവർക്ക് അറിയാമായിരുന്നു. ഈ ആകൃതികളുടെ വിസ്തീർണം കാണാൻ കൃത്യമല്ലെങ്കിലും ചില പ്രായോഗിക നിയമങ്ങൾ അവർ കണ്ടുപിടിച്ചു.

ലോകസംസ്കാരങ്ങൾ വികസിച്ചതോടെ ഗണിതകാരന്മാർ വിവിധ ജ്യാമിതീയാകാരങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ പഠിച്ചു. ബാബിലോണിയ (ഇപ്പോഴത്തെ ഇറാഖ്), ഈജിപ്ത്, ഇന്ത്യ, ചൈന എന്നിവിടങ്ങളിലെ സംസ്കാരങ്ങൾ അന്യോന്യം വിദൂരങ്ങളായിരുന്നെങ്കിലും ഏകദേശം സമാനമായ ജ്യാമിതി ആണ് അവർ വികസിപ്പിച്ചത്. കെട്ടിട നിർമാണവിദഗ്ദ്ധരായിരുന്ന അവർ മട്ടത്രികോ



ചിത്രം 25

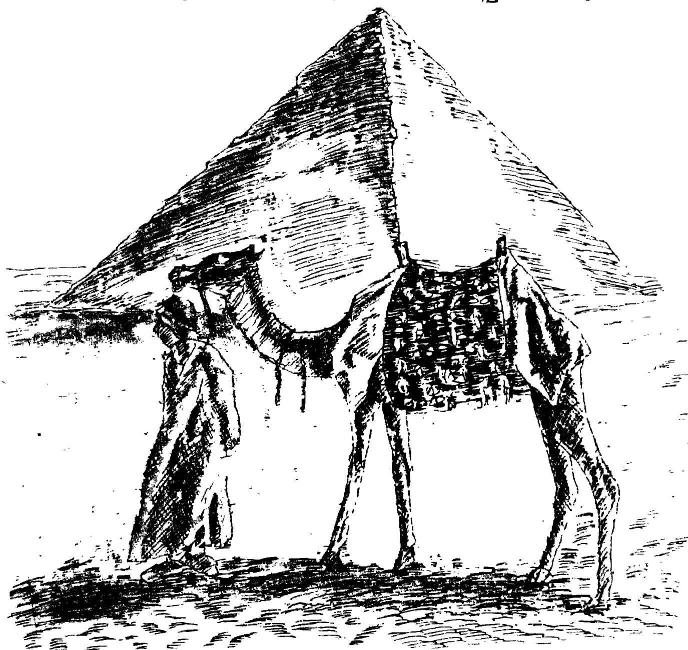
ണത്തിന്റെ സവിശേഷത പ്രയോജനപ്പെടുത്തി നേർരേഖകളും സമചതുരങ്ങളും മറ്റ് രൂപങ്ങളും കൃത്യമായി വരച്ചു. 3,4,5 യൂണിറ്റുകൾ വശമായുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ചെറിയ വശങ്ങൾക്കിടയിൽ മട്ടകോൺ (90^0) ആണെന്ന് ഈജിപ്തുകാർക്ക് അറിയാമായിരുന്നു. ഒരേ അകലത്തിൽ കെട്ടുകൾ ഉള്ള കയറുകൊണ്ട് 3,4,5 വശങ്ങളായ ത്രികോണം അവർ നിഷ്പ്രയാസം വരച്ചു (ചിത്രം 26 a). ഇത്തരം ലളിതോപകരണങ്ങൾ കൊണ്ടാണ് പിരമിഡുകൾ, കൊട്ടാരങ്ങൾ എന്നീ അതിശയപ്പെടുത്തുന്ന വിധം കണിശമായ അളവുകൾ ഉള്ള വാസ്തുവിദ്യകൾ അവർ നിർമിച്ചത്. ഉന്നതിയുടെയും പാദത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണം എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. എന്നാൽ ഈജിപ്തുകാർ പാദത്തിന്റെയും ഒരു വശത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതി ത്രികോണ വിസ്തീർണമായി കരുതി. നീളം കൂടിയതും വീതി കുറഞ്ഞതുമായ ത്രികോ



ചിത്രം 26 a

ണങ്ങളാണ് അവർ സർവേ നടത്താൻ ഉപയോഗിച്ചത്. അതിനാൽ ഉന്നതിയുടെയും വശത്തിന്റെയും നീളങ്ങൾ ഏറെ വ്യത്യാസമുണ്ടായിരുന്നില്ല. ഭൂമി അളക്കാനും നികുതി ഏർപ്പെടുത്താനും വേണ്ട കണക്ക് കൂട്ടലുകൾ കുറെയൊക്കെ ശരിയായിരുന്നു. ബി. സി. 2500 ൽ ഉണ്ടാക്കിയ വലിയ പിരമിഡിന്റെ ആധാരം 230 മീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരമാണ് (ചിത്രം 26b). ഇങ്ങനെയൊരു ഭീമൻ സമചതുരം കണിശമായ വശങ്ങളും കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തി വരച്ചത് വൻനേട്ടമാണ്.

ഇന്ത്യക്കാർ ജ്യാമിതിക്ക് വ്യത്യസ്തമായ മാനം നല്കി. വാനശ്ശാസ്ത്രത്തിലേയും നിത്യജീവിതത്തിലേയും ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണാനുള്ള ഉപാധിയായി അവർ അതിനെ വികസിപ്പിച്ചു. വിസ്തീർണം, വ്യാപ്തം എന്നിവ കാണാനുള്ള ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളിൽ അക്കങ്ങളും ബീജഗണിതവും അവർ സ്വതന്ത്രമായി ഉപയോഗിച്ചു. ഗണിതസൂത്രങ്ങൾ മനഃപ്പാഠമാക്കുന്ന രീതി



ചിത്രം 26 b

ആയിരുന്നതിനാൽ ലിഖിത രേഖകൾ വൈകിയാണ് ഇന്ത്യയിൽ പ്രത്യക്ഷമായത്. ആദ്യകാല ജ്യാമിതി ഗ്രന്ഥമായ ശുൽഭ-സൂത്ര ബി. സി. 800 ന് അടുത്താണ് രചിക്കപ്പെട്ടതെന്ന് വിശ്വസിക്കാം. ഗ്രീക്കുകാർ ജ്യാമിതി ആരംഭിക്കുന്നതിനും എത്രയോ മുമ്പാണ് ഇത്.

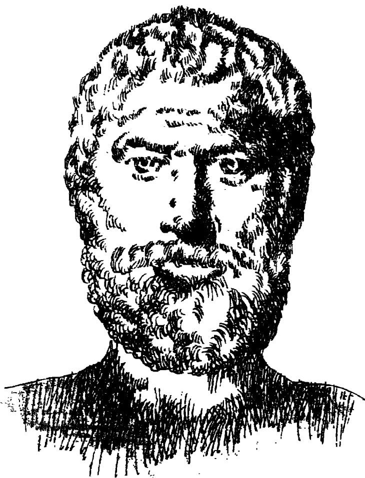
പൈതഗോറസിനും വളരെ മുമ്പു തന്നെ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ബൗധായന സിദ്ധാന്തം എന്ന പേരിൽ ഇന്ത്യയിൽ പ്രചരിച്ചിരുന്നു. ബൗധായനൻ എന്ന ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞൻ വൈദിക വൃത്തികൾ, ബലി കർമങ്ങൾ എന്നിവയ്ക്കായുള്ള പൂജാ വേദികൾ നിർമിക്കാനുള്ള ജ്യാമിതി വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. പൗരാണിക ഭാരതത്തിലെ ഒഴിച്ചുകൂടാനാകാത്ത അനുഷ്ഠാനമായിരുന്നു ബലി കർമങ്ങൾ. വിവിധയിനം ബലികർമങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത ആകൃതിയിലുള്ള വേദികൾ വേണം. അവ നിർദിഷ്ടവും കൃത്യവുമായ അളവുകളിൽ പണിയുകയും വേണം.

സൂര്യന്റെയും ചന്ദ്രന്റെയും നക്ഷത്രങ്ങളുടെയും ചലനങ്ങൾക്ക് പാറ്റേണുകൾ ഉള്ളതായി പൗരാണിക ജനതകൾ നിരീക്ഷിച്ചു. അവയ്ക്ക് അനുസൃതമായി സമയം കണക്കാക്കാനും കലണ്ടറുകൾ നിർമിക്കാനും ആരംഭിച്ചു. കിഴക്കൻ ചക്രവാളത്തിൽ വീണ്ടും പ്രത്യക്ഷപ്പെടാൻ ഓരോ നക്ഷത്ര സമൂഹവും 360 ദിവസങ്ങൾ എടുക്കുന്നെന്ന് ജ്യോതിശാസ്ത്രം പഠിപ്പിച്ചു. വൃത്തപരിധി 360 ഭാഗങ്ങളാക്കി ഒരു ഭാഗത്തിന് ഒരു ഡിഗ്രി എന്ന അളവുനൽകാൻ കാരണം ഇതാണ്. കോണുകൾ അളക്കുന്ന രീതി നിലവിൽ വന്നത് ഇപ്രകാരമായിരുന്നു. ഡിഗ്രിയെ 60 മിനിട്ടുകളായും മിനിട്ടിനെ 60 സെക്കന്റുകളായും വീണ്ടും വിഭജിച്ചു. 60 എന്ന അളവുകോൽ ബാബിലോണിയക്കാരുടെ സംഭാവനയാണ്. അവരുടെ സംഖ്യാസമ്പ്രദായം 60 നെ ആധാരമാക്കിയായിരുന്നു.

ദൈനംദിന വൃത്തികൾ, സാമൂഹ്യ ചടങ്ങുകൾ, മതാനുഷ്ഠാനങ്ങൾ എന്നിവ ക്രമീകരിക്കാൻ നക്ഷത്ര സമൂഹങ്ങളുടെ സ്ഥാനം സഹായകരമായി. സ്ഥലങ്ങളുടെ ദിശാ നിർണയത്തിനും സാധ്യമായി. ശുൽഭസൂത്രയിൽ കിഴക്കുള്ള ചിത്തിര, ചോതി എന്ന നക്ഷത്ര സമൂഹങ്ങൾ ചക്രവാളത്തിന് ഒരു യുഗം മുകളിലാകുമ്പോൾ അവയുടെ മധ്യം കൃത്യമായി ഉറപ്പിക്കാനുള്ള രീതി പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ജ്യാമിതിയുടെ പഠനത്തിന് ഇവയെല്ലാം ഉത്പ്രേരകമായി.

ജ്യോമെട്രി എന്ന വിഷയം

ഭൂമി അളക്കുന്നവർ എന്ന അർഥത്തിൽ ഗ്രീക്കുകാർ ഈജിപ്ഷ്യൻ സർവെയർമാർക്ക് ജിയോമിറ്റേർസ് എന്ന് വിളിച്ചു. ഗ്രീക്കിൽ 'ജി' എന്നാൽ ഭൂമി എന്നും 'മിറ്റിരിയ' എന്നാൽ അളക്കലും എന്നാണ് അർഥം. ത്രികോണങ്ങൾ, സമചതുരങ്ങൾ, ചതുരങ്ങൾ, വൃത്തങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് അവർ ഒട്ടേറെ വസ്തുതകൾ പഠിച്ചു. അറിവിന്റെ ഈ സംഘാതത്തെ ഗ്രീക്കുകാർ ഭൂമിയെ അളക്കൽ എന്ന് അർഥം വരുന്ന ജ്യോമെട്രി എന്ന് വിളിച്ചു. ഈജിപ്തുകാരുടെ നിയമങ്ങളിലെ തെറ്റുകൾ തിരുത്തിയും വിവിധയിനം ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ബന്ധം പഠിച്ചും ഗ്രീക്കുകാർ ജ്യോമെട്രിയിൽ സുപ്രധാന മുന്നേറ്റം നടത്തി. വ്യാസം എന്തായിരുന്നാലും അത് ഒരു വൃത്തത്തെ രണ്ട് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നുവെന്ന് 2500 വർഷങ്ങൾക്ക് മുന്നെ ജീവിച്ചിരുന്ന തേൽസ് കണ്ടെത്തി (ചിത്രം 27). രണ്ട് രേഖകൾ ഏത് കോണുകളിൽ ഖണ്ഡിച്ചാലും വിപരീതകോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കുമെന്നും അദ്ദേഹം നിരീക്ഷിച്ചു. ഭൂമി അളക്കലിൽ നിന്നും രൂപങ്ങളുടെ വിവിധ ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പഠിക്കുന്നതിലേക്ക് ഗ്രീക്കുകാർ ജ്യാമിതിയെ വികസിപ്പിച്ചു. തേൽസിന് ശേഷം പൈതഗോറസ് അടക്കമുള്ള ഗ്രീക്ക് ഗണിതജ്ഞർ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച് പുതിയ നിരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തുകയും അവ തെളിയിക്കുകയും ചെയ്തു.



ചിത്രം 27

നാലാം നൂറ്റാണ്ടായപ്പോഴേക്കും ജ്യാമിതി വളരെയേറെ



ചിത്രം 28

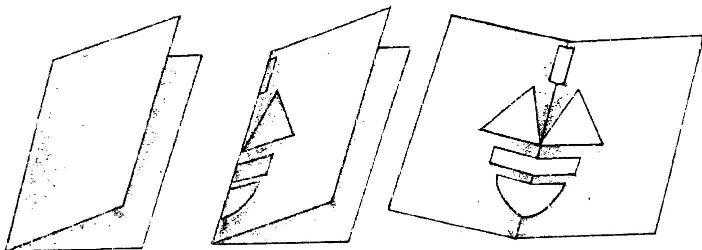
പുരോഗമിച്ചിരുന്നു. ത്രികോണങ്ങൾ, വൃത്തങ്ങൾ മുതലായവയെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഉണ്ടായിക്കഴിഞ്ഞു. പക്ഷെ ഇവയൊന്നും ക്രോഡീകരിക്കപ്പെട്ടിരുന്നില്ല. ഈജിപ്തിലെ അലക്സാണ്ട്റിയ മ്യൂസിയത്തിൽ 300 ബി.സി. യോടടുത്ത് പഠിപ്പിച്ചിരുന്ന യൂക്ലിഡ് (ചിത്രം 28) ആണ് യുക്തി പൂർവകമായ ഒരു സമീപനം ആദ്യം അവതരിപ്പിച്ചത്. 'ജ്യോമെട്രിയിലെ അടിസ്ഥാന വസ്തുതകൾ' എന്ന തന്റെ കൃതിയിൽ ജ്യാമിതീയ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കാൻ അദ്ദേഹം സംജ്ഞകളും നിർവചനങ്ങളും സങ്കല്പങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ രീതിശാസ്ത്രം മറ്റ് ശാഖകളുടെ വികാസത്തിനും മാതൃകയായി. ഇന്നും പ്രസക്തമായ ഒരു സമീപന രീതിയാണ് യൂക്ലിഡ് കണ്ടെത്തിയത്.

തുല്യതയും സാമ്യതയും

തുല്യതയുടെയും സാമ്യതയുടെയും തത്വങ്ങളാണ് ജ്യാമിതിയിൽ ഏറ്റവും പ്രധാനം. നമ്മുടെ എല്ലാ പ്രവൃത്തികളിലും അവ അടിസ്ഥാനമായി വർത്തിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

സർവസമത

ഒരു കടലാസെടുത്ത് നേർരേഖയിൽ രണ്ടായി മടക്കുക. രണ്ട് മടക്കുകളിലുമായി ഏതെങ്കിലും ഒരു രൂപം വെട്ടിയെടുക്കുക. നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന രണ്ട് രൂപങ്ങൾ പരിപൂർണമായി മാച്ച് ചെയ്യുന്നു. പരസ്പരം ചേർത്ത് വെച്ചാൽ മുഴുവനായും പൊരുത്തപ്പെടുന്ന രൂപങ്ങൾ സർവസമതയുള്ളവയാണെന്ന് പറയാം (ചിത്രം 29). ഇപ്രകാരം ചേർത്തുവെച്ച് രൂപങ്ങൾ ഒത്തു നോക്കി തുല്യത നിർണയിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല. രൂപങ്ങൾക്ക് ഒന്നിനൊന്ന് പൊരുത്തം



ചിത്രം 29

സ്ഥാപിച്ച് ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകൾ എടുത്ത് സർവസമത നിർണയിക്കാം. സമാനവശങ്ങളും കോണുകളും തുല്യമായാൽ രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാകുന്നു. അതായത് മൂലകളുടെ സമാനത കണക്കിലെടുത്ത് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളും കോണുകളും ഒരേ അളവുകളിൽ ആണെങ്കിൽ അവ സർവസമമാണ്. കോണുകളും വശങ്ങളും തുല്യമാണോ എന്ന് അറിയുന്നതെങ്ങനെ? നീളം തുല്യമായാൽ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു. കോണളവുകൾ ഒന്നാണെങ്കിൽ രണ്ട് കോണുകൾ തുല്യമാണ്.

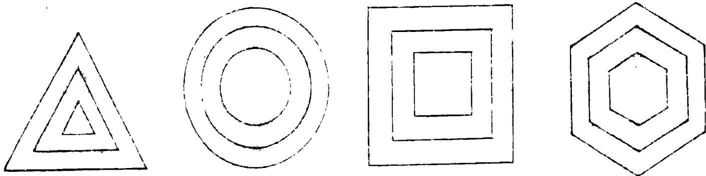
ത്രികോണങ്ങളുടെ സർവസമത പരിശോധിക്കാൻ ആറ് സർവസമതകളും വേണമെന്നില്ല. സമാനമായ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് വസ്തുതകളുടെ നിശ്ചിത തുല്യത ലഭിച്ചാൽ മതി. പക്ഷെ രണ്ട് നിബന്ധനകളുണ്ട്. മൂന്ന് സർവസമതകളിൽ ഒരു വശമെങ്കിലും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം. ഒരു കോൺമാത്രമെ ഉള്ളുവെങ്കിൽ അതിനെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രണ്ട് വശങ്ങൾ കണക്കാക്കണം ചതുർഭുജങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ സർവസമത പരിശോധിക്കാനുള്ള നിബന്ധനകളുടെ എണ്ണം 2×4-3=5 ആകുന്നു. പഞ്ചഭുജങ്ങളാണെങ്കിൽ (2×5-3)=7 ഉം. n വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജങ്ങളുടെ സർവസമത പരിശോധിക്കാൻ 2n-3 നിബന്ധനകൾ കണക്കിലെടുക്കണം. ആരങ്ങൾ തുല്യമായാൽ രണ്ട് വൃത്തങ്ങൾ സർവസമമായി. വശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ രണ്ട് സമചതുരങ്ങൾ സർവസമമാണ്.

നിത്യജീവിതത്തിൽ സർവസമതയ്ക്ക് ഒട്ടേറെ പ്രസക്തിയുണ്ട്. വസ്തുക്കളുടെ സർവസമത നാം ചോദനയിലൂടെ അറിയുന്നു. കാർ, റേഡിയോ, ടി.വി., വാച്ച്, കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ

എന്നിവയുടെ നിർമാണത്തിൽ സർവസമതയുടെ തത്വമുണ്ട്. വിവിധ ഭാഗങ്ങളുടെ ഡൈ ഉണ്ടാക്കിയാണ് വാച്ചുകൾ നിർമിക്കുന്നത്. ഒരേ അച്ചിൽ നിർമിച്ചെടുക്കുന്ന എല്ലാം ഭാഗങ്ങളും ഒരേ പോലെ ആകും. ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ ഏത് ഭാഗവും മാറ്റിവെക്കാൻ സാധിക്കുന്നതും സർവസമതയുടെ തത്വത്തിൽ ആണ്. പുസ്തകത്തിന്റെ എല്ലാം ഏടുകളും സർവസമമായതിനാൽ അവയെ ഒരുമിച്ച് ബൈൻഡ് ചെയ്യാനാകുന്നു. നീളം അളക്കാൻ ഏത് റൂളറും ഉപയോഗിക്കാം. കാരണം എല്ലാ റൂളറുകളും സർവസമമാകുന്നു.

സമാനത

ചിത്രം 30–ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. ചതുർഭുജങ്ങൾ സമചതുരങ്ങളും ഷഡ്ഭുജങ്ങൾ സമഷഡ്ഭുജങ്ങളും ആകുന്നു. ഇവയിലെല്ലാം സമാന കോണുകൾ തുല്യങ്ങളാണെന്ന് കാണാം. എന്നാൽ വശങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിലും തുല്യങ്ങൾ അല്ല. ഈ രൂപങ്ങളെ സമാനരൂപങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സമാനകോണുകൾ തുല്യങ്ങളാകണം; സമാനവശങ്ങളുടെ അനുപാതം ഒന്നു തന്നെ ആയിരിക്കണം. ഇത്രയുമാണ് സമാനതയ്ക്കുള്ള രണ്ട് നിബന്ധനകൾ. എല്ലാ വൃത്തങ്ങളും സമാനങ്ങളാണ്.



ചിത്രം 30

ചിത്രം 31ലെ ഛായാചിത്രങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം. ഇവയുടെ വലിപ്പം വ്യത്യസ്തമാണ്. ഒരു ചിത്രത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവുമായി സമാനബന്ധം പുലർത്തുന്നു. രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഇടയ്ക്കുള്ള അകലം ഓരോ ചിത്രത്തിലും വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിലും ചെറിയ ചിത്ര



ചിത്രം 31

ത്തിൽ അകലങ്ങൾ കുറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്. അതായത് രണ്ട് ചിത്രങ്ങളും സമാനങ്ങളാകുന്നു.

പ്രകൃതിയിൽ അനേകം സമാനരൂപങ്ങളുണ്ട്. ഏറ്റവും നല്ല ഉദാഹരണമാണ് ക്രിസ്റ്റൽ. ഒരു ക്രിസ്റ്റലീയ പദാർഥത്തിന്റെ പരലുകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത വലിപ്പമാണെങ്കിലും അവ ആകൃതിയിൽ സമാനങ്ങളാണ്. ചെറു പരലുകളായി പൊടിച്ചാലും സമാന രൂപങ്ങൾ ലഭിക്കും. വ്യത്യസ്ത വലിപ്പങ്ങളിൽ ഉള്ള സോപ്പുകുമിളകൾ, ചെറുതും വലുതുമായ ഒരേ ഇനം പൂവുകൾ, തേനീച്ചക്കൂടിന്റെ ഷഡ്ഭുജാകൃത ദ്വാരങ്ങൾ, പൂമ്പാറ്റയുടെ ചിറകിലെ ഭംഗിയേറിയ ഡിസൈനുകൾ - എല്ലാം പ്രകൃതിയുടെ സമാനതകളത്രെ.

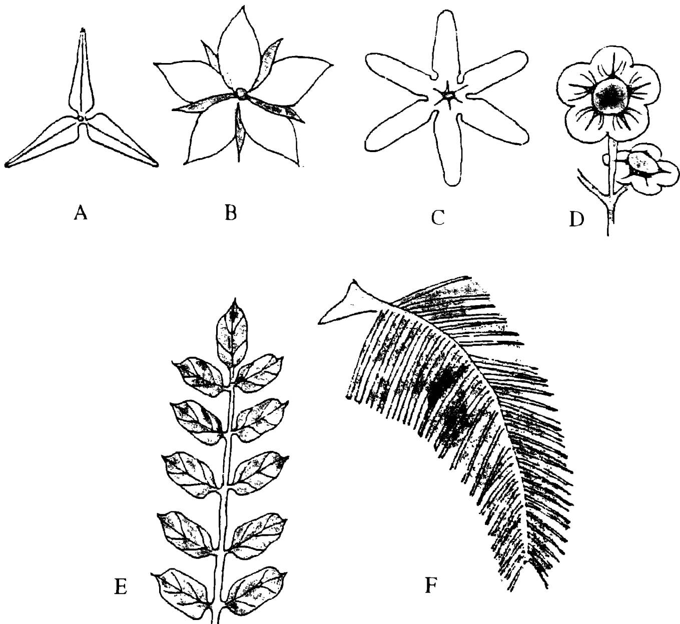
സോപ്പുകുമിളകളും വെള്ളത്തുള്ളികളും എല്ലായ്പ്പോഴും ഗോളാകൃതിയിൽ കാണാൻ കാരണമെന്ത്? ഇതിന് ജ്യാമിതിയുമായി വല്ല ബന്ധമുണ്ടോ? തീർച്ചയായും. പ്രതല ഊർജം കുറവാക്കുന്നതിന് വേണ്ടി ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ പ്രതല

വിസ്തീർണം ഉള്ള ആകാരം വേണം. തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള വിവിധ ഖരരൂപങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കുറവ് പ്രതല വിസ്തീർണം ഗോളത്തിനാകുന്നു. ദ്രാവകത്തുള്ളികളുടെയും സോപ്പുകുമിളകളുടെയും ഗോളാകൃതിക്ക് പുറകിലെ രഹസ്യം ഇതാണ്. ഇതേ കാരണത്താൽ തന്നെ ഗ്രഹങ്ങൾക്കും ഗോളാകൃതി ലഭിച്ചു.

സമമിതി (സിമെട്രി)

സമമിതിയില്ലാതെ ജീവിതം സാധ്യമാണോ? ഇതിനുള്ള ഉത്തരം അല്പം വിശദമായി പരിശോധിക്കാം.

ചിത്രം 32 കാണുക. ചില്ലകളിൽ ഇലകളുടെ വിവിധ ക്രമീകരണവും പൂവിതളുകളുടെ വിന്യാസവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ത്രികോണം, സമചതുരം, പഞ്ചഭുജം, ഷഡ്ഭുജം, വൃത്തം എന്നീ പരിചിത രൂപങ്ങൾ മനുഷ്യൻ കണ്ടെടുത്തത് പ്രകൃതിയിൽ നിന്നാണ്. ക്രമീകരണത്തിൽ മിക്കവാറും പൂർണമായ സമമിതി



ചിത്രം 32

ഇവയിലെല്ലാം നമുക്ക് തിരിച്ചറിയാനാകുന്നു. ഒരു രേഖയേയോ ബിന്ദുവിനേയോ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഒരു രൂപത്തിന്റെ വിവിധഭാഗങ്ങൾക്കുള്ള സർവസമതയ്ക്ക് സമമിതം എന്ന് പറയാം.

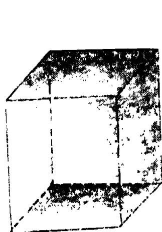
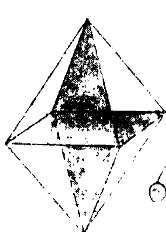
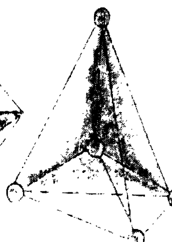
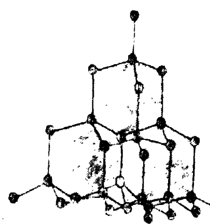
ചിത്രം 32a യിൽ ഇലയുടെ മൂലയും കേന്ദ്രബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന ലംബരേഖയെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഈ രൂപം സമമിതമാണ്. 120 ഡിഗ്രിയിൽ തിരിച്ചാലും സമമിതിയിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ല. അതായത് അക്ഷം, ഭ്രമണം എന്നിവയെ സംബന്ധിച്ച് ഈ ചിത്രം ഏകരൂപമാകുന്നു. 32 e, f എന്നീ ചിത്രങ്ങളൊഴികെ മറ്റെല്ലാ രൂപങ്ങൾക്കും അക്ഷവും ഭ്രമണവും ആധാരമാക്കിയുള്ള സമമിതിയുണ്ട്. ഇലകൾക്ക് അക്ഷത്തെ സംബന്ധിച്ച സിമെട്രി മാത്രമെ ഉള്ളു.

പ്രകൃതിയിൽ അനവധി വസ്തുക്കൾ സിമെട്രി നിലനിർത്തുന്നു. 33a യിലെ ഉപ്പിന്റെ പരലുകൾ ഉദാഹരണം. അവ സമചതുരസ്തംഭങ്ങൾ ആണ്. ക്യൂബിന് അനേകം സിമെട്രി അക്ഷങ്ങൾ ഉണ്ട്. ചിത്രം 33b യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സൾഫർ പരലുകൾ സമഭുജ സാമാന്തരിക സ്തംഭങ്ങളാകുന്നു.

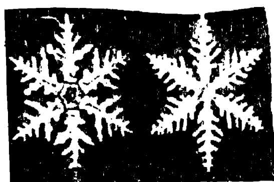
പ്രാധാനമായ വേറൊരു സിമെട്രിക് ഘടന ചതുർഭുജ സ്തൂപമാകുന്നു. രത്നങ്ങളിൽ അമൂല്യമായ വജ്രം കാർബൺ ആറ്റങ്ങളുടെ ചതുർഭുജ സ്തൂപങ്ങളുടെ ശൃംഖലയാൽ നിർമിക്കപ്പെട്ടതാണ്. അത്തരം ശൃംഖലക്ക് മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി ക്വാർട്ട്സ് ക്രിസ്റ്റൽ എടുക്കാം.

പ്രകൃതി ഇഷ്ടപ്പെടുന്ന വേറൊരു ഘടന ഷഡ്ഭുജമാകുന്നു. ഏറ്റവും കാഠിന്യമുള്ള വസ്തുവാണല്ലോ വജ്രം. അതിന് കാരണം കാർബൺ ആറ്റങ്ങളുടെ ചതുർഭുജസ്തൂപ ശൃംഖലയാണ്. എന്നാൽ ഗ്രാഫൈറ്റിൽ കാർബൺ ആറ്റങ്ങൾ ഷഡ്ഭുജ ശൃംഖലയായി ഒരേ പ്രതലത്തിൽ വിന്യസിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഗ്രാഫൈറ്റ് വളരെ മൃദുവായ പദാർഥമാകുന്നു. ഹെവി ഡ്യൂട്ടി മെഷീനുകൾക്ക് അനുയോജ്യമായ ഒരു ലൂബ്രിക്കന്റ് ആണ് ഗ്രാഫൈറ്റ്. സ്ഥലം നിറയ്ക്കാൻ ഏറ്റവും പറ്റിയ ആകാരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണമായ തേനീച്ചക്കൂട് നോക്കുക (ചിത്രം 33e). ഷഡ്ഭുജാകാരമായ ദ്വാരങ്ങളാണ് ഈ സവിശേഷഗുണത്തിന് കാരണം.

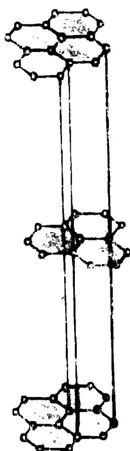
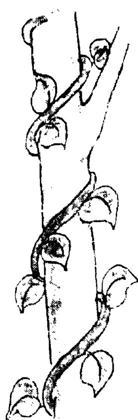
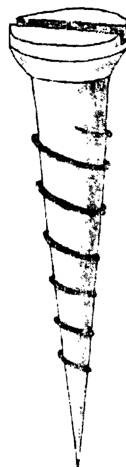
പ്രകൃതിക്ക് ഏറ്റവും പ്രിയങ്കരമായ ജ്യാമിതീയരൂപം ഒരുപക്ഷേ സർപ്പിളാകൃതി (ഹെലിക്സ്) ആയിരിക്കും. ഇത് പൂർണമായും സമമിതമായ രൂപമല്ല. സ്ക്രൂ സർപ്പിളാകൃതിക്ക്

a b c d



e

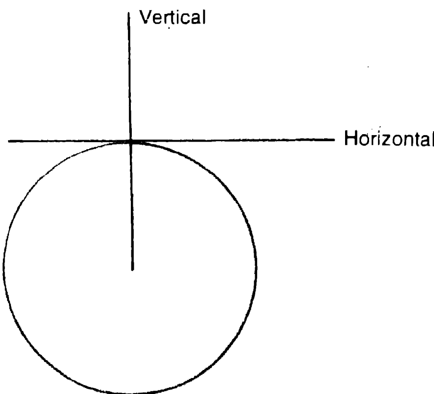
f g

ചിത്രം 33

ഉദാഹരണമായി പറയാം. ഒരു മരത്തെ ചുറ്റിപ്പടരുന്ന വള്ളി, പടർച്ചെടികളുടെ സ്പ്രിങ്ങ് ചുരുൾ പോലുള്ള അഗ്രങ്ങൾ എന്നിവ ഹെലിക്സിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ് (ചിത്രം 33g). ഒരു കോശകേന്ദ്രത്തിലെ ഡി. എൻ. എ. തൻമാത്ര ഇരട്ടപ്പിരിവിനാൽ നിർമിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ തൻമാത്ര ദൃഷ്ടിഗോചരമല്ല. ഇരട്ടപ്പിരിവിലെ ഓരോ ഇഴയും ന്യൂക്ലിയോടൈഡുകളുടെ ഒരു ദീർഘശൃംഖലയാണ്. അതിനകത്ത് ഓരോ പഞ്ചസാര തന്മാത്രയും ഫോസ്ഫേറ്റ് തന്മാത്രയും നൈട്രജൻ ബേസ് തന്മാത്രയും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

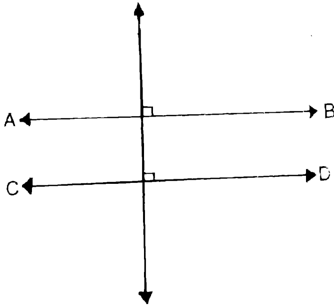
വീടിനകത്തെ ജ്യാമിതി

ജീവിതത്തിൽ സുപ്രധാനമായ രൂപങ്ങളാണ് ചതുരങ്ങളും വൃത്തങ്ങളും. പുസ്തകങ്ങൾ, മേശകൾ, അലമാരകൾ, ചുവരുകൾ, തറകൾ, മേൽപ്പുരകൾ, നാണയങ്ങൾ, കപ്പുകൾ, പാത്രങ്ങൾ എന്നിവ നോക്കുക. ഒരു ആശാരിയുടെ കൈവശം മട്ടവും അളവുകോലും കാണാം. മൺപണിക്കാരനാണെങ്കിൽ സ്പിരിട്ട് ലെവലും പ്ലംബ്ലൈനും കൈയിലുണ്ടാകും. മട്ടത്തിന്റെയും പ്ലംബ്ലൈനിന്റെയും ഉപയോഗമെന്താണ്? ഉത്തരം ലളിതമാണ്. ഭൂഗുരുത്വവും ഭൂമിയുടെ ഗോളാകൃതിയും കാരണം ലംബവും സമാന്തരവുമായ രണ്ട് ദിശകൾ മാത്രമേ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാനാകൂ. ഭൂഗുരുത്വം എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ഭൂകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ആരത്തിന്റെ ദിശയിൽ ആകർഷിക്കുന്നു. ഭൗമോപരിതലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള ഏതൊരു 'ടാൻജന്റ്'' പ്രതലവും ആ ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമായിരിക്കും. പ്രതലത്തെ സമാന്തരമെന്നും ആരത്തെ



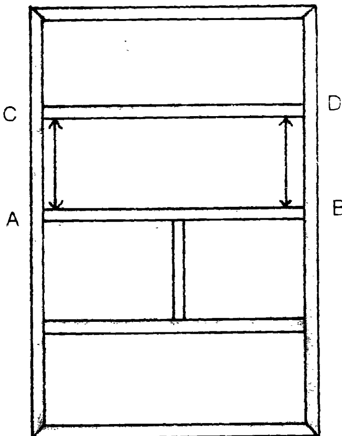
ചിത്രം 34

ലംബമെന്നും വിളിക്കാം (ചിത്രം 34). പ്രതലം സമനിരപ്പാണെങ്കിൽ മാത്രമെ അതിലുള്ള ഒരു വസ്തു കൃത്യമായ സമതുലനത്തിൽ എത്തുകയുള്ളൂ. സമനിരപ്പല്ലാത്ത നിലത്ത് ഒരു പന്തുവച്ചാൽ അത് ഉരുളുന്നു. വെള്ളമൊഴിച്ചാൽ താഴേക്ക് ഒഴുകുന്നു. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ തൂണുകളും ചുമരുകളും കുത്തനെയല്ലെങ്കിൽ കെട്ടിടം ഉറപ്പുള്ളതാകില്ല. അതായത് പ്രകൃതി നമ്മെ നിരപ്പുള്ളതും കുത്തനെയുള്ളതുമായ ദിശകൾ ഉപയോഗിക്കാൻ നിർബന്ധിക്കുന്നു.



ചിത്രം 35

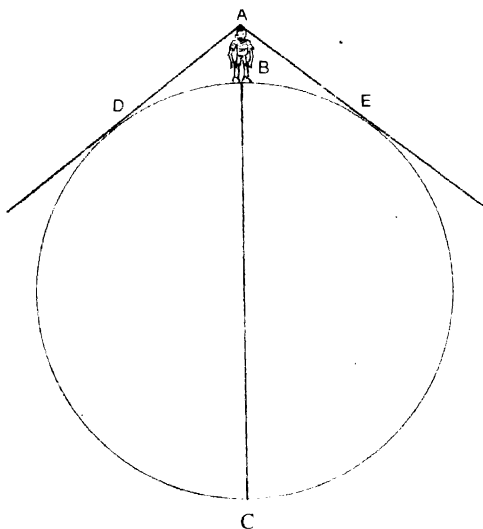
നിർമിക്കാനും ഉപയോഗിക്കാനും എളുപ്പമുള്ള രൂപമാണ് ചതുരം. ആശാരിയുടെ മട്ടം സ്ഥിരമായ ഒരു മട്ടകോണാണ്. ചതുരത്തിന്റെയും സമചതുരത്തിന്റെയും മൂലകളിൽ കൃത്യമായി മട്ടകോൺ വരയ്ക്കാനും ഒരു രേഖയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലും ലംബംവരയ്ക്കാനും സമാന്തരരേഖകൾ വരയ്ക്കാനും മട്ടം സഹായിക്കും (ചിത്രം 35).



ചിത്രം 36

ഒരു അലമാരയുടെ ചട്ടങ്ങൾ ഉറപ്പിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. AC, BD എന്നീ നീളങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് ആശാരി ഉറപ്പുവരുത്തും. എങ്കിൽ മാത്രമേ AB യും CDയും സമാന്തരമാകുകയുള്ളൂ. അലമാരയിൽ വെയ്ക്കുന്ന വസ്തുക്കൾ തുലന

ത്തിൽ ഇരിക്കണമെങ്കിൽ AB യും CD യും സമാന്തരവും സമനിരപ്പും ആകണം (ചിത്രം 36). മൺപണിക്കാരുടെ സ്പിരിട്ട്ലവലും പ്ലംബ് ലൈനും ഉപയോഗിക്കുന്നതും സമനിരപ്പും ലംബവും കണക്കാക്കാൻ തന്നെയാണ്. ഒരു ദ്രാവകത്തിന്റെ തലം എല്ലായ്പ്പോഴും സമനിരപ്പിലാണല്ലോ. സ്പിരിട്ട്ലവലിലെ വായുകുമിള രേഖയോ തലമോ നിരപ്പാണോ എന്ന് കാണിക്കുന്നു. തൂക്കിയിട്ട ഒരു പ്ലംബ് ലൈൻ എല്ലായ്പ്പോഴും ലംബമായിരിക്കും (ചിത്രം 26 'എ').



ചിത്രം 37

ജ്യാമിതീയ സൂത്രവാക്യങ്ങളുപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണങ്ങളും വ്യാപ്തങ്ങളും അളക്കൽ സർവസാധാരണമായ ഒരു പ്രവൃത്തിയാണ്. ആശാരി, മൺപണിക്കാരൻ, ചായം തേപ്പുകാരൻ, കല്ലുംമണ്ണും കൂമ്പാരമിടുന്നവൻ, കുഴിവെട്ടുകാർ എല്ലാവരും വിസ്തീർണവും വ്യാപ്തവും അളക്കാറുണ്ട്.

കൗതുകകരമായ ചില ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകാൻ ജ്യാമിതിക്ക് സാധിക്കും. രണ്ടുമീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാളിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ് ചക്രവാളം എന്ന് കണക്കാക്കിനോക്കാം. ചിത്രം 37 കാണുക. കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രം ആനുപാതികമല്ലെങ്കിലും നമുക്ക് ഉത്തരം കാണാൻ ഈ ചിത്രം സഹായകരമാണ്. AB അയാളുടെ ഉയരം. അതായത് AB = 2 മീറ്റർ. BC ഭൂമിയുടെ വ്യാസം. BC = $13{,}400 \times 10^3$ മീറ്റർ. D യും Eയും ചക്രവാളബിന്ദുക്കളാണ്.

നമുക്ക് കാണേണ്ടത് BDയുടെയോ, DE യുടെയോ നീളമാണ്. AD, AE എന്നിവ 'ടാൻജന്റുകൾ' ആകുന്നു. വൃത്തങ്ങളിലെ ഒരു സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$(AD)^2 = (AB) \times (BC)$$
$$(AD)^2 = 2 \times 13{,}400 \times 10^3$$
$$= 268 \times 10^5 \text{ മീറ്റർ}$$
$$(AD) = \sqrt{26.8 \times 10^6}$$
$$= 5.176 \times 10^3 \text{ മീറ്റർ}$$
$$= 5.176 \text{ കി. മീറ്റർ.}$$

D എന്ന ബിന്ദു അതിവിദൂരമായിരുന്നാൽ BD യും AD യും മിക്കവാറും തുല്യനീളമാണ്. അതു കൊണ്ട് BD = 5.176 കി. മീ. ആണ്. രണ്ടു മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾക്ക് ചക്രവാളം 5.176 കി. മീ. അകലെയാണ്.

ഈയൊരു കൗതുകകരമായ ജിജ്ഞാസ ഒരു ടി. വി. ടവറിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ അത് ആയിരക്കണക്കിന് ആളുകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന വാർത്താവിനിമയവുമായി ബന്ധപ്പെടുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത ദൂരത്തേക്ക് പ്രോഗ്രാമുകൾ പ്രക്ഷേപണം ചെയ്യാൻ ഒരു ടി.വി. ടവറിന് എത്ര ഉയരം വേണം? 200 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ടി.വി. ടവറിന്റെ ചക്രവാളം 5.176 x 10^4 മീറ്റർ (51.76 കി.മീ) വിസ്തൃതമാകും. അതായത് പ്രക്ഷേപണം ചെയ്യുന്ന പരിപാടികൾ 52 കി.മീ ദൂരത്തേക്ക് എത്തുന്നു.

6
ത്രികോണമിതി

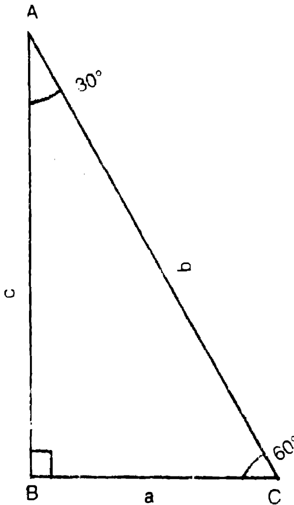
ജ്യാമിതിയുടെ പ്രധാനശാഖയായ ത്രികോണമിതി ത്രികോണങ്ങളെ അളക്കലാണ്. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതാനും ഭാഗങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ അവശേഷിക്കുന്നവ അളക്കാനും അപ്രകാരം ഒരുപാട് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണുവാനും ത്രികോണമിതിയിൽ സാധിക്കും.

താഴെ കാണിച്ച സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം.

- ഒരു പൂന്തോപ്പിൽ നിൽക്കുന്ന പനമരം. അതിനെ കണ്ട് സൗന്ദര്യം ആസ്വദിക്കുമ്പോൾ തന്നെ ഉയരം എത്രയാണെന്ന് കാണുന്നവർക്ക് ചെറിയൊരു സംശയം തോന്നും. മരത്തിൽ കയറാതെ തന്നെ എപ്രകാരം അതിന്റെ ഉയരം അറിയാം?
- വിശാലമായ നദിക്കരയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ. പുഴ കടക്കാതെ തന്നെ അയാൾക്ക് അതിന്റെ വീതി കണക്കാക്കണം.
- ദൂരെ നിൽക്കുന്ന ഒരു മരം എത്ര അകലെയാണെന്ന് കണക്കാക്കണം.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ത്രികോണമിതി സഹായിക്കുന്നു. ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകളും വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ പഠിക്കുന്ന ഗണിതശാഖയാണ് ത്രികോണമിതി. മേൽപറഞ്ഞ ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ കാണാം.

ABC എന്ന ത്രികോണം നോക്കുക (ചിത്രം 38). കോൺ B $=90^0$, കോൺ $A=30^0$, കോൺ $C = 60^0$. a, b, c എന്നിവ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളാണ്. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേകതയനുസരിച്ച് $a = b/2$ ആകും. പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചാൽ $c^2 = b^2 - a^2$ എന്നും ലഭിക്കും. അതായത് $c^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3}{4}b^2$



ചിത്രം 38

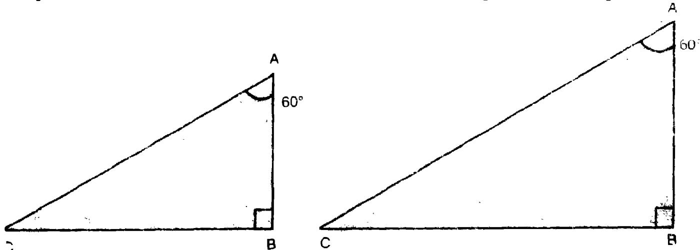
അതായത് $c = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങൾ b, $\frac{b}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ എന്നിവ ആകുന്നു. വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അനുപാതമെടുത്താൽ

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

എന്നുലഭിക്കും. ഈ ഓരോ അനുപാതത്തിനും ഒരു നിശ്ചിത വിലയാണെന്നു കാണാം. നാം കണക്കിലെടുക്കുന്ന കോണിന് അനുസരണമായി ഈ അനുപാതങ്ങൾക്ക് പ്രത്യേക പേരുകൾ നൽകിയിരിക്കുന്നു. 60 ഡിഗ്രി അളവുള്ള കോൺ 'C' എടുത്താൽ a/b, c എന്ന കോണിന്റെ 'കൊസൈൻ', c/b കോൺ C യുടെ 'സൈൻ', c/a കോൺ C യുടെ ടാൻജന്റ് എന്നിങ്ങനെ പേരുകൾ നൽകാം. എളുപ്പത്തിനുവേണ്ടി Cos, Sin, tan എന്നിങ്ങനെ എഴുതാം. അപ്രകാരം

$$\cos 60^0 = 1/2, \ \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

അനുപാതങ്ങളുടെ വില വശങ്ങളുടെ നീളത്തെയല്ല കോണുകളുടെ അളവിനെയാണ് ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നത് എന്നത് സുപ്രധാനമാണ്. ചിത്രം-39ലെ Cos 60 യുടെ വിലയും 1/2



ചിത്രം 39

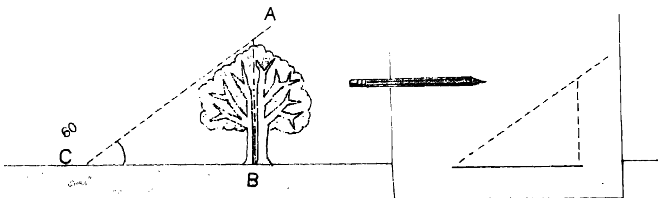
ആകുന്നു. പൂജ്യം മുതൽ 90^0 വരെയുള്ള എല്ലാ കോണുകളുടെയും മേൽപറഞ്ഞ അനുപാതങ്ങൾ കണക്കാക്കി പട്ടിക തയ്യാറാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിനെ ത്രികോണമിതി പട്ടിക എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ പട്ടിക നോക്കി ഏത് അനുപാതത്തിന്റെയും വില കണ്ടെത്താം. അപ്രകാരം

$$\cos 60^0 = 0.5000, \text{Sin } 60^0 = 0.8660, \tan 60 = 1.732.$$

പൗരാണിക ഗണിതകാരന്മാരുടെ ഒരു പ്രധാന ലക്ഷ്യം കൃത്യമായ ത്രികോണമിതി പട്ടികകൾ തയ്യാറാക്കലായിരുന്നു. നികിയയിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് എന്ന ഗ്രീക്ക് ഗണിതജ്ഞനാകണം ആദ്യത്തെ പട്ടികകൾ തയ്യാറാക്കിയത്. സൂര്യന്റെയും ചന്ദ്രന്റെയും വലിപ്പം, ഭൂമിയിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം എന്നിവ കാണാൻ ആദ്യമായി ശ്രമിച്ചത് അദ്ദേഹമാണ്. ഭൂമിയിൽ നിന്നെടുത്ത അളവുകളാൽ ബഹിരാകാശവസ്തുക്കളുടെ അളവുകൾ കാണാൻ ഒരു ഗണിതശാഖ ആവിഷ്കരിക്കണമെന്ന് അദ്ദേഹത്തിന് തോന്നി. അപ്രകാരണമാണ് ഹിപ്പാർക്കസ് ത്രികോണമിതി കണ്ടുപിടിച്ചത്.

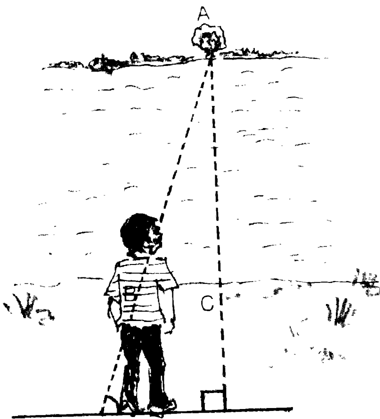
ചില ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണാൻ എപ്രകാരമാണ് ത്രികോണമിതി സഹായിക്കുന്നത്? ത്രികോണവൽക്കരണരീതിയനുസരിച്ച് നാം ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ അളക്കുന്നതിന് ത്രികോണമിതി പട്ടികകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ലളിത ചിത്രങ്ങൾ കൊണ്ട് ചോദ്യങ്ങൾ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

ആദ്യത്തെ ചോദ്യം എടുക്കുക. മരം AB എന്ന രേഖകൊണ്ടും നിലം BC എന്ന രേഖ കൊണ്ടും കാണിക്കാം (ചിത്രം 40). ABC എന്ന കോൺ 90^0 ആണ്. BC = 10 മീറ്റർ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. C യിലുള്ള നിരീക്ഷകൻ മരത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം നോക്കു



ചിത്രം 40

മ്പോൾ വീക്ഷണരേഖ നിലവുമായി 60^0 കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അതിനാൽ AB/BC =tan60^0. അതായത് AB/10 = 1.7321 മീറ്റർ. AB = 1.7321 × 10 = 17.321 മീറ്റർ. മരത്തിന്റെ ഉയരം 17.321 മീറ്റർ ആണെന്ന് നമുക്ക് ലഭിച്ചു. മരത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം BC, നിലവുമായുള്ള കോൺ C എന്നിവ അളക്കുന്നതിലേക്ക് മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുവാനുള്ള പ്രശ്നത്തെ നാം ലഘൂകരിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

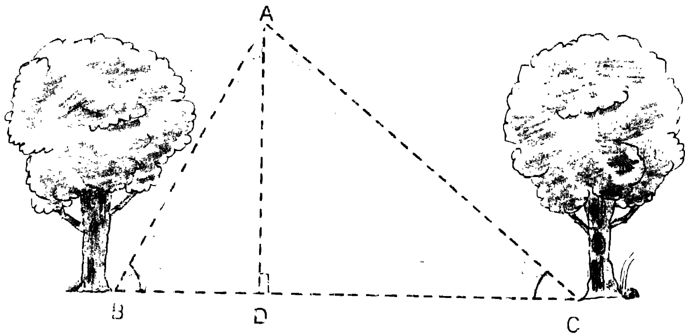


ചിത്രം 41

രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് നിരീക്ഷകൻ നദീതീരത്ത് B എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിൽക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക(ചിത്രം 41). A എന്ന ബിന്ദു (മറുകരയിലെ ഒരു മരം എന്നു കരുതാം) അയാൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ABC എന്ന കോൺ അളന്നപ്പോൾ 72^0 ലഭിച്ചു. അയാൾ A യ്ക്ക് കൃത്യം എതിരെയുള്ള C എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് നടക്കുന്നു. ACB എന്ന കോൺ 90^0 ആണ്. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന് AC/BC = tan 72^0. AC = 30 × tan 72^0 = 30× 3.077 = 92.310 അതായത് നദിയുടെ വീതി 92.310 മീറ്റർ ആകുന്നു.

മൂന്നാമത്തെ പ്രശ്നത്തിലെ നിരീക്ഷകൻ B,C എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയ്ക്കുള്ള ദൂരം അളന്നു എന്നു കരുതുക (ചിത്രം 42). Bയും Cയും രണ്ടുമരങ്ങൾ നിൽക്കുന്ന സ്ഥാനങ്ങളാണ്. AB, AC, AD എന്നീ നീളങ്ങൾ അയാൾക്ക് കാണണം. A വളരെ അകലെയായതിനാൽ ഇവ അളക്കാൻ വിഷമമാണ്. പക്ഷെ ABC, ACB എന്നീ കോണുകൾ അളക്കാൻ സാധിക്കും.

BC = 100 മീറ്റർ, കോൺ ABC = 60^0 കോൺ ACB = 50^0 എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാം. ത്രികോണമിതി പട്ടികയിൽനിന്നും



ചിത്രം 42

$\tan 60^0 = 1.7321$, $\tan 50^0 = 1.1918$ എന്നും അയാൾക്ക് കണ്ടെത്താം. AD കണക്കാക്കാൻ.

$$AD = \frac{100(\tan 60^0 \times \tan 50^0)}{(\tan 60^0 + \tan 50^0)}$$

$$= \frac{100 \times 1.7321 \times 1.1918}{1.7321 + 1.1918} = 120.3m$$

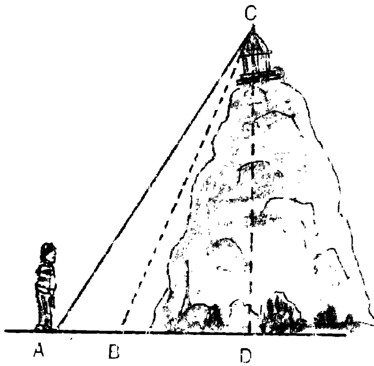
AB യും AC യും താഴെക്കാണും പ്രകാരം കണ്ടെത്താം.
$AB = AD/\sin 60^0$

$$AB = \frac{AD}{\sin 60^0}$$

$$AC = \frac{AD}{\sin 50^0}$$

$$AB = \frac{120.372}{0.8660} = 139.00m$$

$$AC = \frac{120.372}{0.7660} = 157.14m$$



ചിത്രം 43

ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒട്ടേറെ പ്രശ്നങ്ങൾ ത്രികോണമിതി സൂത്രവാക്യങ്ങളും പട്ടികകളും കൊണ്ട് ചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി വിദൂരമായ ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെയോ കുന്നിന്റെയോ കെട്ടിടത്തിന്റെയോ ഉയരം അരികിൽ ചെല്ലാതെ കണ്ടെത്താം (ചിത്രം 43 നോക്കുക).

C, കിടങ്ങിനപ്പുറമുള്ള ഒരു കൊടുമുടിയുടെ അഗ്രമാണ്. Aയിൽ നിൽക്കുന്ന നിരീക്ഷകൻ ACB എന്ന കോൺ 55^0 എന്നളക്കുന്നു. B യിലേക്ക് നൂറു മീറ്റർ നടന്ന് അയാൾ CBD എന്ന കോൺ 65^0 എന്നും അളക്കുന്നു.

$$\frac{h}{BD} = \tan 65^0$$

$$\frac{h}{100 + BD} = \tan 55^0$$

h എന്ന ഉയരം കാണാൻ,

$$h = \frac{100 \times \tan 55^0 \times \tan 65^0}{\tan 65^0 - \tan 55^0}$$

$$= \frac{100 \times 1.4281 \times 2.1445}{2.1445 - 1.4281} = 427.5 \text{ മീറ്റർ.}$$

അതായത് കൊടുമുടിയുടെ ഉയരം 427.5 മീറ്റർ ആണ്. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ കൊടുമുടിയായ എവറസ്റ്റിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കിയതാണ് ത്രികോണമിതിയുടെ ഉപയോഗത്തിന്റെയും പ്രാമുഖ്യത്തിന്റെയും ഏറ്റവും ഉജ്വല ഉദാഹരണം.

അവലംബം

1. ഗ്രഹാം ഫ്ളാഗ് : സംഖ്യകൾ, പെൻഗ്വിൻ ബുക്സ്.
2. ലാൻസ്‌ലോട്ട് ഹോഗ്ബൻ : മാത്തമാറ്റിക്സ് ഫോർ മില്ല്യൺസ്, പോക്കറ്റ് ബുക്സ്.
3. മോറീസ് ക്ലൈൻ : മാത്ത്മാറ്റിക്കൽ തോട്ട്, വോള്യം -ഒന്ന്, ഓക്സ്ഫോർഡ് യൂണിവേഴ്സിറ്റി പ്രസ്സ്.
4. ജെയിംസ് ആർ. ന്യൂമാൻ : ദി വേൾഡ് ഓഫ് മാത്ത്മാറ്റിക്സ്, വോള്യം - 1///1, ടെംപസ് ബുക്സ്.
5. മാത്ത്മാറ്റിക്സ് ഇൻ മോഡേൺ വേൾഡ്, ദി സയന്റിഫിക് അമേരിക്കൻ പബ്ലിക്കേഷൻ.
6. എൻ. ദത്ത് ആന്റ് സിങ്ങ്: ഹിസ്റ്ററി ഓഫ് ഹിന്ദു മാത്ത്മാറ്റിക്സ്.
7. എൻ. എച്ച്. ഫഡ്കെ : ലീലാവതി പുനർ ദർശൻ (മറാത്തി).
8. ആർ. പി. കുൽക്കർണി : ഫോർ ശുൽഭ - സൂത്രാസ് (മറാത്തി), സാഹിത്യ സംസ്കൃതി മണ്ഡൽ, (മഹാരാഷ്ട്ര).

Lasertypeset at Märk, LIC Lane, Pattom, Thiruvananthapuram
and printed at Beauty Print, New Delhi-55